p.

Phys. sp. 47

Beer

<3662177172001 1

<3662177172001 1

Bayer. Staatsbibliothek

EINLEITUNG

IN DIE

ELEKTROSTATIK

DIE

LEHRE VOM MAGNETISMUS

UND DIE

ELEKTRODYNAMIK.

EINLEITUNG

IN DIE

ELEKTROSTATIK

DIE

LEHRE VOM MAGNETISMUS

UND DIE

ELEKTRODYNAMIK

VON

AUGUST BEER.

NACH DEM

TODE DES VERFASSERS HERAUSGEGEBEN

VON

JULIUS PLÜCKER,
Professor in Bonn.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1865.

266 - Gg.

Die Herausgabe einer Uebersetzung in französischer und englischer Sprache, sowie in anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

HERRN

GEORG BEER,

Ritter des rothen Adlerordens 3. Klasse mit der Schleife,

ehemaligem Stadtrathe zu Trier.

VORREDE.

Nach einer kurzen aber glänzenden wissenschaftlichen Laufbahn starb Professor Dr. August Beer hier zu Bonn am 18. November 1863. Der Tod unterbrach seine rastlose Thätigkeit. Ihm war es nicht beschieden, was er in anspruchsloser Bescheidenheit geschaffen, der Oeffentlichkeit zu übergeben; er sollte nicht mit eigenen Augen sehen, wie die Arbeit, auf welche sich während eines Decenniums die geistige Kraft seines Lebens concentrirt hatte, eine lohnende Anerkennung fände und zur Hebung der Wissenschaft beitrüge. Nur die eine hohe Befriedigung, welche im Schaffen selbst liegt, ward ihm zu Theil.

Beer wurde am 1. August 1825 zu Trier geboren. Unter der Leitung seines Vaters, der die Beschäftigung mit dem klassischen Alterthume, in idealer Lebensauffassung, mit dem alltäglichen Geschäftsverkehre zu verbinden verstand, machte er die Realschule und dann die höheren Klassen des Gymnasiums seiner Vaterstadt durch. Mit vielseitigen und gründlichen Kenntnissen ausgerüstet,

besuchte er im Herbste 1845 die hiesige Universität, wo er das Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften zu seinem Lebensberufe wählte. Seitdem gehörte er unserer Universität im vollen Sinne des Wortes an. Die Universalität seines Geistes gab sich hier darin kund, dass er die sämmtlichen Naturwissenschaften mit Liebe umfasste und in jeder derselben ein eingehendes Wissen sich erwarb. Bald aber concentrirte er seine Thätigkeit auf Mathematik und Physik. Nach dem ersten Jahre seiner akademischen Studien trat er mit mir dadurch in ein näheres Verhältniss, dass er auf dem physikalischen Cabinette Assistent wurde. In dieser Stellung leistete er mir hülfreiche Hand bei meinen eigenen Arbeiten und wurde bald mein gleichberechtigter Mitarbeiter, was er auch nach vollendeten Studien längere Zeit noch blieb. Er doctorirte im Jahre 1848 auf Grund einer Abhandlung „de situ axium opticorum in crystallis biaxibus“, die früher den Preis bei der philosophischen Facultät erhalten hatte, bestand gleich nachher die Prüfung pro facultate docendi und habilitirte sich im Herbste 1850 bei der Universität als Privatdocent. Zwei Jahre hindurch ertheilte er als Candidat des höheren Schulamtes an dem hiesigen Gymnasium mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, dem er seine ganze Liebe widmete. Aber dann erst erhielt seine Lehrthätigkeit ihre angemessene Entwicklung, als er ganz zur Universität übertrat, wo er sowohl durch die Klarheit und Bestimmtheit seines Vortrages als durch die Freundlichkeit seines ganzen Wesens eine immer grössere Anzahl von Schülern an sich fesselte. Im Jahre 1855 wurde er auf den einstimmigen und nach-

drücklichen Vorschlag der Facultät zum ausserordentlichen, zwei Jahre später zum ordentlichen Professor ernannt.

Meine Aufgabe ist es nicht, seine in Zeitschriften zerstreute Abhandlungen einzeln hier aufzuzählen und zu würdigen. Ebenso erwähne ich bloss die im Geiste der neueren analytischen Geometrie abgefassten, 1852 in Bonn bei Marcus erschienenen: „Tabulae curvarum quarti ordinis symmetricarum asymptotis rectis et linea fundamentali recta praeditarum.“ Seine litterarische Thätigkeit wendete sich bald vorzugsweise der Optik zu. Im Jahre 1853 erschien seine „Einleitung in die höhere Optik“ (Braunschweig bei Fr. Vieweg und Sohn) und bald nachher eine französische Uebersetzung derselben von Herrn Forthomme. Die mathematische Theorie des Lichtes ist einer der schönsten wissenschaftlichen Triumphe, welche der menschliche Geist während der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts feierte. Aber es war eine mühsame Arbeit, die verschiedenen Abhandlungen, welche zur Ausbildung derselben beitrugen und mehrfach unter dem Siegel der Originalität ihrer Verfasser noch ungelöste Räthsel enthielten, auf ihren einfachsten Ausdruck zurückzuführen und einem allgemeinen Gesichtspunkte unterzuordnen. Das that Beer in seiner „Einleitung“ und erwarb sich dadurch den Dank Vieler, denen er die abstracten Lehren zugänglich machte. Ich erwähne hier noch eine im folgenden Jahre ebenfalls in Braunschweig erschienene Schrift: „Grundriss des photometrischen Calcüls“ die sich enge an die „Photometria“, welche Lambert 1790 veröffentlichte, anschliesst. Sie ist ein Tribut der

Verehrung für diesen grossen Mathematiker und mehr als eine Episode in den litterarischen Arbeiten Beer's anzusehen. Durch die Einleitung in die höhere Optik war die specielle Richtung seiner wissenschaftlichen Thätigkeit bestimmt worden; gleich nach Vollendung des Werkes fasste er den Gedanken, unter demselben Gesichtspunkte die mathematische Theorie aller Theile der Physik zu behandeln. Er führte diesen Gedanken mit unermüdlichem Fleisse, leider mit zu wenig Rücksicht auf seine Gesundheit, aus, und schon seit mehreren Jahren lagen sieben in sich abgeschlossene Arbeiten unter dem bescheidenen Titel „Einleitungen“ vor: Die Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus, die Elektrodynamik, die Lehre von der Elasticität, die Lehre von der Capillarität, die Wärmelehre und eine zweite Einleitung in die Optik, welche, der bereits im Drucke erschienenen sich anreihend, die in dieser gezogenen Grenzen weiter rückt. Mit der grössten Sorgfalt arbeitete er jede der Einleitungen mehrmals um, so dass man sagen kann, er habe mit dem Manuscripte das vorgenommen, was sonst erst spätere Auflagen bringen. Er schob immer die Herausgabe weiter hinaus und erst im Angesichte des Todes übergab er mir zu diesem Zwecke drei der Einleitungen, welche die elektrisch-magnetischen Disciplinen zum Gegenstande haben und, für sich ein Ganzes bildend, einen Band ausfüllen, der sich der Einleitung in die höhere Optik zur Seite stellt. Ausser einigen Aenderungen und Fortlassungen, welche der Verstorbene selbst bezeichnet hatte, ist Alles gewissenhaft so abgedruckt, wie derselbe es nieder-

geschrieben. Die Herausgabe wurde mir dadurch leicht gemacht, dass Herr Giesen, gegenwärtig Rector der höheren Bürgerschule in Düren, nicht nur die Correctur besorgte, sondern auch alle analytischen Entwicklungen und Rechnungen während des Druckes nochmals verificirt hat. So war es der ausgesprochene Wunsch Beer's, der Herrn Giesen hochschätzte.

Mit der Herausgabe des vorliegenden Bandes ist der mir gewordene Auftrag erfüllt. Auch die vier übrigen Einleitungen sind mir anvertraut, aber ohne irgend eine Weisung, der Verstorbene konnte sich nicht mehr darüber aussprechen. Meine Verantwortlichkeit ist hierbei eine grosse, ich kann über ihre vollständige oder theilweise Veröffentlichung einen Entschluss erst dann fassen, wenn ich selbst in ihren ganzen Inhalt eine genaue Einsicht genommen habe. Ich rechne dabei insbesondere auf die treue und sachkundige Unterstützung meines bisherigen Mitarbeiters.

Beer in seiner liebenswürdigen Persönlichkeit wird in dem Andenken aller derjenigen fortleben, die ihm näher getreten sind. Jedem Parteitreiben fremd, gehörte er zu den, namentlich im akademischen Leben, so seltenen Ausnahmen von Männern, die nur Freunde, keine Feinde haben. Das trat namentlich in der allgemeinen Theilnahme hervor, die er erfuhr, als ihn jene qualvolle Krankheit erreichte, die wechselnd, bald in naher, bald in ferner Zukunft den sichern Tod zeigt. Das sprach sich aus in dem zahlreichen Zuge, der ihn, welcher ganz zurückgezogen gelebt, auf seinem letzten Wege begleitete, als unter den Ausbrüchen des Gefühles der umstehenden Freunde und

Schüler, das sich nicht mehr zurückhalten liess, die sterblichen Reste, geweiht durch die Thränen, welche Liebe der Liebe opfert, der Erde anvertraut wurden. Ich habe nie bei ähnlichen Fällen einen solchen Ausdruck der Trauer gesehen, und jeder, der zugegen war, musste sich sagen: in Beer ist ein hoher seliger Geist von uns geschieden.

Ich habe über den Inhalt der vorliegenden Schrift hier nichts hinzuzufügen; sie wird die Anerkennung finden, die sie verdient. Nur eine letzte Pflicht liegt mir noch ob, diesen Blättern, im Geiste des Verstorbenen, noch ein Blatt hinzuzufügen, das den Namen eines nahe neunzigjährigen Greises trägt: ein Denkmal der Pietät des Sohnes.

Bonn, den 27. März 1865.

Plücker.

INHALT.

ELEKTROSTATIK.

Seite

I. Principien der Elektrostatik 1
II. Vom Potential elektrischer Massen 7
III. Vom Gleichgewichte der Elektricität in einem vollkommen leitenden Körper . 21
1. Allgemeine Betrachtungen —
2. Beispiele von elektrischem Gleichgewichte auf isolirten Conductoren . 29
IV. Von der durch feste elektrische Massen bei einem einzelnen Leiter bewirkten Induction der Elektricität 40
1. Allgemeine Betrachtungen —
2. Influenz-Elektricität auf einer sphärischen Fläche 48
a) Lehrsätze über das Potential der Sphäre —
b) Bestimmung der auf einer Kugelfläche durch feste elektrische Massen inducirten Ladung 58
3. Allgemeine Entwicklung der auf einer beliebigen Fläche durch feste elektrische Massen inducirten Ladung. Anwendung auf ein Ellipsoid, welches der Wirkung einer vertheilenden Kraft ausgesetzt ist 61
V. Vom Gleichgewichte der Elektricität auf zwei einander influencirenden Conductoren 74
1. Allgemeine Betrachtungen —
2. Gegenseitige Influenz zweier sphärischer Conductoren. Bestimmung der Ladung eines sphärischen Conductors nach absolutem Maasse 78
3. Elektrische Verstärkungs-Apparate. Das Princip der Erhaltung der Kraft auf den Hergang bei der Entladung eines Verstärkungs-Apparates angewandt. Bestimmung der Ladung eines Verstärkungs-Apparates nach absolutem Maasse . 97

LEHRE VOM MAGNETISMUS.

Seite

I. Grundlagen der mathematischen Theorie des Magnetismus . . 115
II. Wechselwirkung zwischen zwei permanenten Magneten 118
1. Allgemeine Formeln —
2. Ueber das Potential eines permanenten Magneten 120
3. Verhalten eines permanenten Magneten im homogenen magnetischen Felde . 123
4. Experimentelle Prüfung des Grundgesetzes für die magnetische Wirkung . 129
5. Mathematische Darstellung der Wirkung des Erdmagnetismus . 136
III. Von der Induction des Magnetismus im Allgemeinen 146
1. Lehnsatz aus der Elektrostatik —
2. Magnetische Induction in einem einzelnen Körperelemente. Verhalten eines beliebig gestalteten Körpers im homogenen magnetischen Felde 150
IV. Magnetische Induction in einem isotropen Körper 155
1. Allgemeine Formeln —
2. Magnetische Induction in einer Kugel 170
a. Induction in einer Vollkugel —
α) Verhalten einer Kugel im homogenen magnetischen Felde 171
β) Magnetisirung einer Kugel durch einen einzelnen Pol. Wechselwirkung zwischen einer Kugel und einer verschwindend kleinen Magnetnadel . 174
b. Induction in einer Hohlkugel 178
α) Verhalten einer Hohlkugel im homogenen magnetischen Felde 180
β) Magnetisirung einer Hohlkugel durch eine in ihrem Mittelpunkte befindliche verschwindend kleine Magnetnadel 181
3. Magnetische Induction in einer seitlich unbegrenzten planplanen Platte . 182
4. Verhalten eines Ellipsoides im homogenen magnetischen Felde . 186
5. Vertheilung des Magnetismus in einem Kreiscylinder mit gerade angesetzten Endflächen durch eine mit der Axe parallele Kraft . 195
V. Vom Diamagnetismus . 208
VI. Näherungsformeln für die Induction des Magnetismus in einem Mittel mit sehr kleiner Inductions-Constante. Anwendung dieser Formeln bei flüssigen Körpern 213
VII. Magnetische Induction in krystallinischen Mitteln 221
1. Verallgemeinerung der für isotrope Körper gültigen Formeln . —

Seite

2. Verhalten einer krystallinischen Kugel im homogenen magnetischen Felde . 229
VIII. Erweiterung der Theorie der magnetischen Induction 235
IX. Von der Coercitivkraft . 242

ELEKTRODYNAMIK.

I. Von der Wechselwirkung elektrischer Ströme 249
1. Ableitung der Ampère'schen Formel für die Wechselwirkung zweier Stromelemente aus der Weber'schen Fundamental-Formel für die Wechselwirkung elektrischer Massen . —
2. Von der Wechselwirkung zwischen linearen elektrischen Strömen . 256
a. Wirkung zwischen einem Strome und einem Stromelemente . —
b. Wirkung zwischen zwei in sich geschlossenen Strömen . 259
c. Experimentelle Prüfung der Ampère'schen Formel . 264
3. Von den elektrischen Elementarströmen 275
a. Wirkung zwischen einem Stromelemente und einem Elementarstrome 276
b. Wirkung zwischen einem Stromelemente und einem Solenoïde . 279
c. Wirkung zwischen einem Solenoïde und einem Elementarstrome . 281
d. Wechselwirkung zwischen zwei Solenoïden 283
e. Zurückführung der Wechselwirkung zwischen linearen elektrischen Strömen auf die Wechselwirkung zwischen transversal-magnetischen Flächen 286
II. Vom Elektromagnetismus . 296
1. Ampère's Hypothese vom Wesen des Magnetismus . . . —
2. Von der Wirkung zwischen einem linearen elektrischen Strome und einem permanenten Magneten, sowie von der Induction des Magnetismus durch einen linearen elektrischen Strom . 297
III. Theorie der stationären elektrischen Strömung 310
1. Allgemeine Gesetze der stationären elektrischen Strömung . —
2. Von der stationären elektrischen Strömung in linearen Leitern . 320
a. Das Ohm'sche Gesetz —
b. Elektroskopische Eigenschaften der galvanischen Kette . 330
c. Das Joule-Lenz'sche Gesetz 334
3. Von der stationären elektrischen Strömung in einer ebenen Platte von constanter verschwindender Dicke 343

Seite

a. Allgemeine Betrachtungen 343
b. Stationäre elektrische Strömung in einer ebenen, allseitig unbegrenzten Platte 345
c. Stationäre elektrische Strömung in einer kreisförmigen Platte . 347
4 Von der stationären elektrischen Strömung in einem allseitig unbegrenzten Raume 354
5. Von der stationären elektrischen Strömung in einem sphärischen Leiter . 356
6. Von der stationären elektrischen Strömung in einer sphärischen Fläche von constanter verschwindender Dicke . . . 359
7. Von der stationären elektrischen Strömung in einem Kreiscylinder . 360
8. Von der fictiven elektrischen Strömung in der Oberfläche eines Magneten, welche nach aussen hin dieselbe Wirkung, wie der Magnet selbst, ausübt 366
IV. Theorie der Induction elektrischer Ströme 370
1. Von der aus der relativen Bewegung eines Leiters und eines linearen elektrischen Stromes hervorgehenden elektromotorischen Kraft . —
2. Von der in einem linearen Leiter durch relative Bewegung gegen einen constanten elektrischen Strom oder Magneten inducirten elektrischen Strömung 376
3. Vergleichung der Theorie der Induction in linearen Leitern durch relative Bewegung gegen einen Strom oder Magneten mit den Ergebnissen der Beobachtung 385
a. Induction in einem linearen Leiter durch einen congruenten Strom für den Fall, dass beide in der einen Grenzlage einander sehr nahe, in der anderen Grenzlage unendlich weit von einander entfernt sind . —
b. Induction in einem kreisförmigen Leiter durch einen kreisförmigen Strom 386
c. Unipolare Induction 389
d. Dämpfung einer Multiplicatornadel. Bestimmung der Constante in der Weber'schen Fundamentalformel 392
e. Bestimmung des absoluten Fortpflanzungscoefficienten für Elektricität 397
4. Ueber die Bewegung von Systemen linearer elektrischer Ströme und Magnete, mit besonderer Rücksicht auf chemische Action und Wärmeentwickelung 404
a. Bewegung zweier linearer elektrischer Ströme 405
b. Bewegung eines linearen Stromes und eines permanenten Magneten 410
c. Bewegung eines linearen elektrischen Stromes und eines magnetisirbaren Körpers 411
d. Bewegung eines Elektromotors 413

ELEKTROSTATIK.

I.

PRINCIPIEN DER ELEKTROSTATIK.

Die mathematische Theorie der elektrostatischen Erscheinungen geht von der Annahme zweier in einem gewissen Gegensatz zu einander stehender Fluida aus, die als Hülfsvorstellungen an die Stelle zweier einander entgegengesetzter Zustände gesetzt werden. Wenn ein Volumelement mit Glaselektricität geladen ist, so denken wir uns seinen elektrischen Zustand dadurch bestimmt, dass es mit einem gewissen Quantum des positiven elektrischen Fluidums gefüllt ist. Dieses Quantum lässt sich durch das Product aus dem Volumen des Elementes und der Dichtigkeit des Fluidums darstellen. Analoges wie für die Glaselektricität gilt für die Harzelektricität, welche wir auf das negative elektrische Fluidum zurückführen. Ueber die Wechselwirkung elektrischer Quanta oder elektrischer Massen werden folgende auf die Erfahrung basirte Annahmen gemacht Die elektrischen Massen q und q', welche zwei Körperelemente mit den Volumina dk und dk' erfüllen, stossen einander mit gleicher Kraft ab, wenn sie gleichartig sind, sie ziehen einander mit gleicher Kraft an, wenn sie entgegengesetzter Natur sind und die Richtung der Wirkung fällt in die Verbindungslinie beider Elemente. Was die Grösse der Wirkung betrifft, so ist sie der einen wie der anderen Quantität proportional. Ausserdem ist sie von der Entfernung der Elemente in der Art abhängig, dass sie dem reciproken Quadrate derselben proportional ist. Wenn wir hiernach durch ϱ, ϱ' die Dichtigkeiten der

Massen bezeichnen, und die Dichtigkeit je nachdem die betreffende Elektricität die Glas- oder Harzelektricität ist bezüglich als positive oder negative Grösse einführen, und wenn ferner r die Entfernung der Massen, a eine gewisse Constante bedeutet, so stellt sich die fragliche Kraft dar durch den Ausdruck:

$$a \cdot \frac{q q'}{r^2} = a \frac{\varrho\, dk \,.\, \varrho' \,.\, dk'}{r^2},$$

und es findet, jenachdem dieser Ausdruck einen positiven oder negativen Werth hat, bezüglich eine Abstossung oder Anziehung statt. Die Art, wie sich die Wirkung des einen elektrischen Quantums, wir wollen sagen die des ersten, auf das zweite äussert, hängt von der Wechselwirkung zwischen diesem letzteren Quantum und der wägbaren Materie in dem Raume des zweiten Elementes ab. Gehört das zweite Element einem Körper an, der eine ungehinderte Bewegung der Elektricität zulässt, so wird die in ihm enthaltene Elektricität in Folge der Einwirkung des ersten Elementes in Bewegung gerathen. Körper dieser Art nennen wir vollkommene Leiter; zu ihnen können wir unter anderen die Metalle zählen, in deren Innerem die Elektricität nie längere Zeit haften bleibt. Wenn aber das fragliche Element einem Stoffe angehört, welcher durchaus keine Bewegung der Elektricität zulässt, so überträgt sich die Wirkung zwischen dem ersten elektrischen Quantum und dem in dem Elemente enthaltenen auf die ponderable Materie des letzteren, und äussert sich durch Bewegung derselben, wenn eine solche gestattet ist. Körper dieser zweiten Art nennen wir vollkommene Isolatoren und die erwähnte charakteristische Eigenschaft derselben besitzen unter anderen wenigstens annähernd das Glas, die Harze, die trockenen Gase; denn die elektrischen Zustandsänderungen dieser Stoffe gehen im Allgemeinen nur langsam vor sich. Endlich möge noch des Falles gedacht werden, wo das zweite Element von einem isolirenden nicht elektrisirten Mittel, etwa einem trockenen Gase, umgeben ist. Es leuchtet ein, dass sich hier hinsichtlich der Einwirkung, welche das Element erleidet, die Sachen stets so verhalten, als ob sich die elektrische Wirkung ohne Weiteres auf die im Elemente enthaltene ponderable Materie übertrüge, mag nun diese letztere zu den leitenden oder zu den isolirenden Stoffen gehören.

Hier kann also auch aus dem mechanischen Verhalten des Elementes auf die Wirkung geschlossen werden, welche die in ihm enthaltene Elektricität erleidet. Mit diesem letzteren Falle haben wir es bei den sogleich zu erwähnenden Versuchen zu thun, insofern als ein Körper von verhältnissmässig kleinen Dimensionen, der an einem isolirenden Halter oder Träger befestigt, übrigens aber von Luft umgeben ist, annähernd mit dem betrachteten Elemente übereinkommt.

Von den zahlreichen Erfahrungen, durch welche die Abhängigkeit zwischen der elektrischen Wirkung und der Distanz, wie sie in dem Grundgesetze ausgesprochen ist, bewiesen wird, theilen wir folgenden von Riess (die Lehre von der Reibungselektricität. 1853) angestellten Versuch mit. Der Balken einer Coulomb'schen Drehwage, mit einer Kugel versehen, deren Radius im Vergleich mit der Länge des Balkens klein war, wurde mittelst des oberen Torsionskreises auf den Nullpunkt der unteren Skala und damit zugleich zur Berührung mit der Standkugel gebracht, deren Dimension ebenfalls im Vergleich mit der Länge des Wagebalkens klein war. Die sich berührenden Kugeln wurden hierauf elektrisirt; die bewegliche Kugel wurde abgestossen und kam nach einigen Schwankungen des Wagebalkens bei einer Elongation von 42° zur Ruhe. Hierauf wurde der Torsionskreis in einer der stattgehabten Bewegung des Wagebalkens entgegengesetzten Richtung um 70° gedreht, was zur Folge hatte, dass sich der Wagebalken der Anfangslage näherte und bei einer Elongation von 28° zur Ruhe kam. Endlich kam nach einer weiteren Vergrösserung der Torsion um 40° die Ruhelage in das Azimut 23° zu liegen.

Bezeichnen wir für einen der drei Fälle des Gleichgewichtes durch φ die Elongation des Wagebalkens, durch l seine Länge, sowie durch q und q' die an den Kugeln haftenden Elektricitätsmengen, so ist, dem Grundgesetze zufolge, die am Ende des Balkens wirkende Kraft:

$$\frac{a\,q\,q'}{\left(l \sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}.$$

Für diese Kraft kann man aber setzen eine in der Mitte des Wagebalkens angreifende gleich grosse und gleich gerich-

tete Kraft, deren Wirkung ausser Acht gelassen werden kann und ein Gegenpaar, dessen Moment sich ausdrückt durch:

$$\frac{aqq'}{2l \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \tang\frac{\varphi}{2}}.$$

Andererseits wirkt an dem Wagebalken die Torsion des Fadens, deren Wirkung einem Gegenpaare mit dem Momente $\theta\tau$ gleichkommt, wenn θ der Torsionswinkel und τ das Torsionsmoment des Fadens für eine Drehung von 1^0 ist. Für den Fall des Gleichgewichtes ist dann:

$$\frac{aqq'}{2\tau l} = \theta \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \tang\frac{\varphi}{2},$$

und der rechterhand stehende Ausdruck müsste für die drei Fälle des Versuches denselben Werth erlangen. Man findet aber, indem man die den Torsionen 42^0, 98^0, 133^0 entsprechenden Ausschläge 42^0, 28^0, 23^0 einsetzt, bezüglich die Werthe 0,578, 0,591, 0,539. Die Differenz der beiden ersten Zahlen kann den Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden, die Differenz der ersten und letzten aber lässt sich erklären theils aus dem Verluste an Elektricität, den die elektrischen Körper durch die Berührung mit der Luft erleiden, theils aus dem Umstande, dass die Dimensionen der Kugeln im Vergleich mit ihrer Distanz noch zu gross waren. Dem Grundgesetze zufolge ist die elektrische Wirkung zwischen zwei körperlichen Elementen bei derselben Distanz mit jedem der in ihnen enthaltenen Quanta proportional. Um auch diesen zweiten Theil des Gesetzes wenigstens für einen besonderen Fall zu prüfen, kann man wie folgt verfahren. Nachdem die Kugeln der Drehwage elektrisirt und die Torsion bestimmt worden, welche der elektrischen Wirkung das Gleichgewicht hält, berühre man die Standkugel mit einer isolirten, ihr an Grösse gleichen und ebenfalls leitenden Kugel. Die Elektricität der Standkugel vertheilt sich zu gleichen Theilen auf beide einander berührende Kugeln, und die Standkugel behält, wenn die andere Kugel von ihr entfernt wird, die Hälfte ihrer ursprünglichen Ladung. Man wird alsdann finden, dass auch die Torsion, welche jetzt der elektrischen Wirkung zwischen den beiden Kugeln der Wage für dieselbe

Distanz wie zuvor das Gleichgewicht hält, nur halb so gross wie die zuerst bestimmte Torsion ist.

Es ist hier der Ort, noch einige Bemerkungen über den oben berührten Umstand, dass die elektrisirten Körper ihre Ladung allmälig an die Luft abgeben, zu machen.

Innerhalb gewisser Grenzen darf man annehmen, dass unter übrigens gleichen Umständen der Verlust an Elektricität, welchen ein elektrisirter leitender Körper durch den Einfluss der Luft erleidet, mit der in dem Körper enthaltenen Menge proportional ist. Bezeichnen wir letztere durch q, die Zeit durch t, so ist also:

$$dq = -\lambda q \,.\, dt,$$

wo λ einen gewissen Coefficienten, die Hälfte des sogenannten Zerstreuungscoefficienten, darstellt. Man hat hiernach, wenn q_0 die der Zeit t_0 entsprechende Menge und e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet:

$$q = q_0 \, e^{-\lambda(t-t_0)} \,.$$

Mit Hülfe dieser Formel ist man im Stande, die Anzeigen der Torsionswage auf eine und dieselbe Zeit zu reduciren, sobald der Zerstreuungscoefficient bekannt ist. Um aber letzteren zu bestimmen, kann man wie folgt verfahren. Nachdem die beiden Kugeln der Drehwage zur Berührung gebracht und gemeinschaftlich elektrisirt worden sind, ermittele man die Torsionen, welche bei gleicher Elongation des Wagebalkens in zwei aufeinander folgenden Zeitpunkten den Abstossungskräften das Gleichgewicht halten. Findet man θ_1, θ_2 für die den Zeiten t_1, t_2 entsprechenden Torsionswinkel, so hat man:

$$2\lambda = \frac{\log \theta_1 - \log \theta_2}{t_2 - t_1} \,.$$

Für den Zerstreuungscoefficienten fand Coulomb*) von einem Tage zum anderen sehr verschiedene Werthe, wonach denn die Anwendung der oben aufgestellten Reductionsformel zu beschränken ist. Andererseits aber erhielt er für kleinere Zeiträume stets denselben Werth, als er das Verhältniss der Radien und der Ladungen, sowie den Stoff der beiden Kugeln in der Drehwage

*) Biot, Traité de physique expérimentale et mathématique. 1816.

änderte, ferner auch als er an die Stelle der Kugeln andere Formen treten liess. Von der Natur der Elektricität ist nach Versuchen von Biot der Zerstreuungscoefficient ebenfalls unabhängig.

Ausser dem im Obigen erörterten Grundgesetze für die elektrische Wirkung muss zur Erklärung der elektrostatischen Erscheinungen noch die Annahme gemacht werden, dass sich aus jedem Elemente eines vollkommen leitenden Körpers durch elektrische Einwirkung beide Elektricitätsarten ins Unbegrenzte entwickeln lassen und zwar beide in gleichen Quantitäten, dass hingegen die Natur der vollkommenen Isolatoren eine solche Scheidung der elektrischen Fluida nicht gestattet.

Für die Constante, welche im Vorhergehenden durch a bezeichnet wurde, werden wir in der Folge die Einheit setzen. Es kommt dies darauf hinaus, als Einheit der Elektricität dasjenige Quantum positiver Elektricität anzunehmen, welches, in einen Punkt concentrirt, auf ein gleiches, ebenfalls in einen Punkt concentrirtes Quantum mit der Kraft Eins wirkt, wenn die Entfernung beider Quanta gleich Eins ist. Die Einheit der Kraft ist diejenige Kraft, welche der Masseneinheit die Geschwindigkeit Eins ertheilt, wenn sie auf diese Masse während einer Zeiteinheit wirkt. Als Einheit der Linie nehmen wir aber an das Centimeter, als Einheit der Masse die eines Grammes und als Einheit der Zeit die Secunde.

II.

VOM POTENTIAL ELEKTRISCHER MASSEN.

1. Da die Form des Grundgesetzes für die elektrische Wirkung mit der für die allgemeine Anziehung der Materie identisch ist, so leuchtet ein, dass die Potentialfunction wie in der Gravitationslehre, so auch in der Elektrostatik eine häufige und vortheilhafte Anwendung finden werde. Unter dem Potentiale elektrischer Massen, die in beliebiger Weise durch einen Raum vertheilt sind, verstehen wir aber den Ausdruck

$$\int \frac{\varrho \, dk}{r} = V,$$

wo dk ein körperliches Element des Raumes bedeutet, ϱ die in diesem Elemente herrschende Dichtigkeit der Elektricität, r die Entfernung desselben Elementes von einem und demselben beliebig gelegenen Punkte P und wo endlich die Summation sich über sämmtliche Elemente des geladenen Raumes erstreckt. Der Werth des Potentials V ändert sich mit der Lage des Punktes P und ist bei constanter Ladung blos eine Function der Coordinaten dieses Punktes, auf den es sich bezieht. Wenn sich der Punkt P continuirlicher Weise bewegt, so ändert sich auch der entsprechende Potentialwerth im Allgemeinen stetig, desgleichen die ersten partiellen Differentialquotienten in Bezug auf die Coordinaten.

Eine klare Vorstellung von dem Verlaufe der Potentialfunction gewinnt man durch Betrachtung der Flächen, welche sich durch die Gleichung

$$V = constans$$

darstellen, und von welchen die einzelne erhalten wird, wenn man der rechts auftretenden Constante einen bestimmten Werth beilegt. Man nennt diese Flächen wegen der Rolle, welche sie in der Hydrostatik spielen, Niveauflächen oder Gleichgewichtsflächen. In allen Punkten einer Niveaufläche hat also das Potential einen und denselben Werth. Durch einen jeden Punkt des Raumes lässt sich stets eine und im Allgemeinen nur eine einzige Niveaufläche legen.

Die Gruppe von Linien, welche das System der Niveauflächen senkrecht durchschneiden, nennt man aus bald entgegentretenden Gründen Kraftlinien. Durch jeden Punkt des Raumes geht stets eine und zwar im Allgemeinen nur eine einzige Kraftlinie. Bezeichnen x, y, z rechtwinklige Coordinaten, dx, dy, dz die Projectionen eines Bogenelementes einer Kraftlinie auf die Axen, so lassen sich die aus der Definition folgenden simultanen Differentialgleichungen der Kraftlinien wie folgt schreiben:

$$dx : dy : dz = \frac{dV}{dx} : \frac{dV}{dy} : \frac{dV}{dz}.$$

Die Kraftlinien können als die Durchschnittslinien zweier Gruppen von Flächen angesehen werden, von welchen die eine Gruppe die andere rechtwinklig schneidet und welche beide die Gruppe der Niveauflächen unter rechten Winkeln treffen, so dass sie also mit dieser ein System dreier Gruppen von sogenannten Orthogonalflächen bilden. Je zwei der Orthogonalflächen, welche verschiedenen Gruppen angehören, schneiden sich längs einer gemeinsamen Krümmungslinie.

Das Potential nähert sich mit wachsender Entfernung von den erzeugenden Massen einer bestimmten Grenzform, über welche die Entwicklung nach fallenden Potenzen der Entfernung von einem Punkte der Massen Aufschluss giebt. Es sei nämlich q_1 die Quantität des positiven, $-q_2$ die Quantität des negativen Theiles der Massen. Ferner seien O_1 und O_2 die Schwerpunkte der genannten Theile, d. h. zwei Punkte, deren Lage von der Vertheilung der betreffenden Massen in gleicher Weise abhängt wie die Lage des Schwerpunktes gewöhnlicher Massen von der Vertheilung dieser Massen. Die Länge der Linie $O_1 O_2$ sei l, ihr Mittelpunkt O. Endlich werde durch R

die Entfernung eines Punktes P von O und durch δ der Winkel bezeichnet, welchen die Richtung OP mit der Richtung $O_2\,O_1$ bildet. Man findet alsdann für das Potential im Punkte P:

$$V = \frac{q_1 - q_2}{R} + \frac{(q_1 + q_2)\, l \cos \delta}{2\, R^2} + \ldots$$

Das Potential nähert sich hiernach mit wachsender Entfernung von den elektrischen Massen, unter Q die Gesammtquantität der letzteren verstanden, dem Ausdrucke

$$\frac{Q}{R}.$$

Wenn die elektrischen Massen aus zwei entgegengesetzt gleichen Theilen bestehen, so erhält man, unter q die absolute Quantität eines jener Theile verstanden, die Grenzform

$$\frac{q\, l \cos \delta}{R^2}.$$

Das hier auftretende Product $q\,l$ entspricht der Grösse, welche man bei magnetischen Massen das magnetische Moment nennt.

2. Die Wirkung elektrischer Massen auf ein Quantum Elektricität q, das in einen beliebigen Punkt P des Raumes concentrirt ist, lässt sich in anschaulicher Weise mit Hülfe des Potentiales jener Massen näher bestimmen. Wir lassen diese Bestimmung folgen, indem wir dem Leser die analytische Ableitung derselben, welche keine Schwierigkeit darbietet, überlassen.

Durch den Punkt P legen wir eine Niveaufläche und bezeichnen die von innen nach aussen gerichtete Normale dieser Fläche, welche die Kraftlinie in P berührt, durch PN, sowie eine Differentiation nach dieser Normale durch $\frac{d \ldots}{d N}$. Die Kraft, welche auf die Masse q wirkt, drückt sich alsdann aus durch

$$q \frac{d V}{d N},$$

und jene Kraft wirkt, wenn dieser Ausdruck positiv ist, in der Richtung von N nach P, wenn er aber negativ ist, in der Richtung von P nach N, so dass also die Masse q, wenn sie frei

wäre, sich so bewegen würde, dass der Ausdruck $q\,V$ allemal abnimmt, d. h. einen negativen Zuwachs erlangt.

Für die Componente der soeben betrachteten Wirkung nach einer Richtung PM, die mit PN den Winkel φ einschliesst, findet man, wenn durch $\frac{d\ldots}{dM}$ eine Differentiation nach PM angedeutet wird:

$$q\,\frac{dV}{dN}\cos\varphi = q\,\frac{dV}{dM}.$$

Ins Besondere hat man also für die Componenten nach den Coordinatenaxen:

$$q\,\frac{dV}{dx},\quad q\,\frac{dV}{dy},\quad q\,\frac{dV}{dz}.$$

Die Grösse $-\frac{dV}{dM}$ nennt man das Gefälle des Potentiales in der Richtung PM, und dem entsprechend werden wir die entgegengesetzt gleiche Grösse $\frac{dV}{dM}$ die Steigung des Potentiales in derselben Richtung nennen. Das Gefälle stellt die in die Richtung PM fallende Componente der Kraft dar, mit welcher die elektrischen Massen auf die in den Punkt P concentrirte Einheit der positiven Elektricität einwirken. Unter Gefälle und Steigung schlechtweg werden wir das Gefälle und die Steigung in der Richtung der von innen nach aussen gerechneten Normale der Niveaufläche verstehen.

Für die Grenze, welcher sich die Steigung des Potentiales mit wachsender Entfernung von den elektrischen Massen nähert, erhalten wir, wenn wir die früheren Bezeichnungen beibehalten,

$$-\frac{Q}{R^2},$$

und es nähern sich einander die Normale der Niveaufläche und die Linie R. Wenn aber die elektrischen Massen aus zwei entgegengesetzt gleichen Theilen bestehen, so nähert sich die Steigung des Potentiales dem Ausdrucke

$$-\frac{ql}{R^3}\sqrt{1+3\cos\delta^2},$$

und für den in gleichem Sinne mit δ gerechneten Winkel η zwischen der Normale der Niveaufläche und der Linie R kommt:

$$\cos\eta = \frac{2\cos\delta}{\sqrt{1+3\cos\delta^2}}.$$

Die oben aufgezählten Eigenschaften der Potentialfunction lassen sich leicht an dem Potentiale der homogenen Hohlkugel erläutern. Werden die Radien der äusseren und inneren Grenzfläche einer solchen Hohlkugel durch R_1 und R_2, die Dichtigkeit durch ϱ bezeichnet, so findet man für den ganzen ausserhalb der Kugel gelegenen Raum:

$$V = \frac{\frac{4}{3}\pi\varrho\,(R_1^3 - R_2^3)}{r},$$

wo r die Entfernung des Punktes, auf den sich das Potential bezieht, vom Mittelpunkte der Hohlkugel bedeutet. Ferner ergiebt sich für das Innere der Schale:

$$V = 2\pi\varrho\left(R_1^2 - \frac{1}{3}r^2\right) - \frac{\frac{4}{3}\pi\varrho R_2^3}{r}.$$

Und für die Punkte der Höhlung hat man:

$$V = 2\pi\varrho\,(R_1^2 - R_2^2).$$

3. Eine besondere Betrachtung verdient der folgende Ausdruck, der aus dem Potentiale durch theilweise Differentiation nach den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z des Punktes, auf den sich das Potential bezieht, abgeleitet wird:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}.$$

Dieser Ausdruck, welchen wir in der Folge abkürzend durch $\Delta^2 V$ bezeichnen werden, verschwindet, wie man durch Differentiation unter dem Integralzeichen findet, in allen Punkten des Raumes, in denen die Dichtigkeit der Elektricität gleich Null ist. Um über seinen Werth in einem Punkte des mit Elektricität geladenen Raumes Aufschluss zu erhalten, denken wir uns um jenen Punkt eine Kugel von so kleinem Radius beschrieben, dass die Dichtigkeit innerhalb der Hülfskugel als

constant betrachtet werden kann. Mit Rücksicht auf die soeben erwähnte Beziehung fällt alsdann $\Delta^2 V$ mit $\Delta^2 v$ zusammen, wenn v das für den inneren Raum der homogenen Hülfskugel geltende Potential der Masse ist, welche diese Kugel erfüllt. Nun findet man aber durch Ausrechnung, dass hier $\Delta^2\ v$ den Werth $-4\pi\varrho$ annimmt, unter ϱ die Dichtigkeit der Hülfskugel, oder was dasselbe ist, die elektrische Dichtigkeit verstanden, die in dem Mittelpunkte derselben stattfindet. Es ist hiernach in der Unterstellung, dass die cubische Dichtigkeit ϱ allenthalben einen endlichen Werth aufweist, allgemein

$$\Delta^2 V = -4\pi\varrho.$$

Letztere Gleichung verliert aber ihre Bedeutung in Punkten von Flächen, wo eine plötzliche Aenderung der Dichtigkeit stattfindet, z. B. an der Fläche, in welcher zwei Räume mit homogener Ladung aneinander stossen, oder an den Grenzen eines geladenen und eines nicht geladenen Raumes. In der That kann ja auch in solchen Punkten von einer bestimmten Dichtigkeit nicht die Rede sein.

Dem Ausdrucke $\Delta^2 V$ lässt sich eine Form geben, in welcher die Coordinaten nicht auftreten, sondern nur Grössen, die sich auf die Niveaufläche beziehen. Es sei nämlich dS ein Element einer Niveaufläche und auf dem Umfange dieses Elementes mögen Normalen errichtet werden. Diese Normalen schneiden aus der Niveaufläche, welche von der ersten in der Richtung der von innen nach aussen gerechneten Normale um dN entfernt ist, ein Element heraus, das durch dS' bezeichnet werde. Es werde ferner durch $\frac{dV}{dN}$ und $\frac{dV'}{dN'}$ die Steigung des Potentials in den Punkten der Elemente dS und dS' bezeichnet, und durch dk das körperliche Element, welches von dS, dS' und den durch die Umfänge dieser Elemente gelegten Normalen begrenzt wird. Alsdann hat man:

$$\Delta^2 V\, dk = \frac{dV'}{dN'} dS' - \frac{dV}{dN} dS.$$

In der That, wenn R_1 und R_2 die Krümmungsradien zweier aufeinander senkrechter Normalschnitte des Elementes dS sind, so hat man:

$$dS' = dS + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dS\, dN.$$

Ferner ist:

$$\left(\frac{dV}{dN}\right)^2 = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2,$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{dV'}{dN'} = \frac{dV}{dN}$$

$$+ \frac{\frac{dV}{dx}\cdot\frac{d\left(\frac{dV}{dN}\right)^2}{dx} + \frac{dV}{dy}\cdot\frac{d\left(\frac{dV}{dN}\right)^2}{dy} + \frac{dV}{dz}\cdot\frac{d\left(\frac{dV}{dN}\right)^2}{dz}}{2\left(\frac{dV}{dN}\right)^2} dN.$$

Bildet man jetzt den Ausdruck $\frac{dV'}{dN'} dS' - \frac{dV}{dN} dS$ mittelst der für dS' und $\frac{dV'}{dN'}$ gefundenen Ausdrücke und drückt die Differentialquotienten von V aus durch die Differentialquotienten von z nach x und y, deren Relationen sich durch Differentiation der Gleichung $V = const.$ für die Niveaufläche ergeben, so findet man:

$$dS\, dN \left\{\Delta^2 V + \frac{dV}{dN}\left(\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] + \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}\right)\right\}$$

wo gesetzt ist:

$$\frac{dz}{dx} = p,\ \frac{dz}{dy} = q,\ \frac{d^2z}{dx^2} = r,\ \frac{d^2z}{dx\,dy} = s,\ \frac{d^2z}{dy^2} = t.$$

Der letzte Ausdruck fällt aber nach der Theorie der Krümmung von Flächen mit $\Delta^2 V.\ dk$ zusammen.

Bezeichnet man den Bogen einer Kraftlinie des Potentiales V durch l, so ist, wie sich aus dem Obigen leicht finden lässt:

$$\frac{d^2V}{dl^2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{dV}{dl} + 4\pi\varrho = 0.$$

Hieraus ergiebt sich folgende bemerkenswerthe Beziehung zwischen den Steigungen $\frac{dV}{dl}, \frac{dV'}{dl'}$ in zwei den Bogen l, l' entsprechenden Punkten, vorausgesetzt, dass die Dichtigkeit auf

der ganzen Strecke der Kraftlinie zwischen den beiden Punkten verschwinde:

$$\frac{dV}{dl} : \frac{dV'}{dl'} = e^{\int_l^{l'} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dl.}$$

4. Es ist hier der Ort, eines von Green gefundenen Satzes zu gedenken, der häufige Anwendung in der Lehre von der Elektricität findet und aus dem sich eine grosse Anzahl der wichtigsten Eigenschaften der Potentialfunction ableiten lässt. Es bezieht sich dieser Satz auf die Umformung des Integrales:

$$\int G\, \Delta^2 H\, dk,$$

welches sich über die Elemente dk eines von einer geschlossenen Fläche umgrenzten Raumes erstreckt und in dem G und H zwei Functionen der rechtwinkligen Raumcoordinaten x, y, z bedeuten, die in der ganzen Ausdehnung des Raumes endliche Werthe aufweisen und stetig verlaufen.

Wendet man auf den Ausdruck

$$\int dk \frac{dG}{dz} \cdot \frac{dH}{dz} = \int dx \int dy \int dz \frac{dG}{dz} \cdot \frac{dH}{dz}$$

die Regel der theilweisen Integration an, so findet man für denselben, wenn z', z'' die zu x, y gehörenden z-Coordinaten der Grenzfläche bedeuten, welche, wie wir der Einfachheit wegen annehmen wollen, von einer geraden Transversale nur in zwei Punkten geschnitten werde:

$$\int dx \int dy \left[\left\{ G \frac{dH}{dz} \right\}_{z'}^{z''} - \int_{z'}^{z''} G \frac{d^2 H}{dz^2} dz \right].$$

Hierfür kann man aber, wenn das Element der Grenzfläche durch ds und ein Element der nach aussen gerechneten Normale durch dn bezeichnet wird, schreiben:

$$\int G \frac{dH}{dz} \cdot \frac{dz}{dn} ds - \int G \frac{d^2 H}{dz^2} dk.$$

Indem wir in den obigen Ausdrücken an die Stelle von z die Coordinate y und hierauf x treten lassen, und die gewonnenen Resultate combiniren, finden wir zunächst:

$$\int G\Delta^2 H\,dk = \int G\left\{\frac{dH}{dx}\cdot\frac{dx}{dn} + \frac{dH}{dy}\cdot\frac{dy}{dn} + \frac{dH}{dz}\cdot\frac{dz}{dn}\right\} ds$$
$$- \int \left\{\frac{dG}{dx}\cdot\frac{dH}{dx} + \frac{dG}{dy}\cdot\frac{dH}{dy} + \frac{dG}{dz}\cdot\frac{dH}{dz}\right\} dk.$$

Eine Vereinfachung der letzten Formel wird durch Einführung der durch die Gleichungen $G = const.$, $H = const.$, dargestellten Flächen erzielt. Es werde eine Differentiation nach den Normalen dieser Flächen durch $\frac{d\ldots}{dg}$, $\frac{d\ldots}{dh}$ bezeichnet, und der Winkel zwischen den Normalen der beiden Flächen, die sich durch das Element dk legen lassen, werde δ genannt. Alsdann kann man für die letzte Gleichung die folgende schreiben, in der die Coordinaten nicht mehr auftreten:

$$\int G\Delta^2 H\,dk = \int G\frac{dH}{dn}\,ds - \int \frac{dG}{dg}\cdot\frac{dH}{dh}\cos\delta\,dk.$$

Wir lassen eine Reihe von Sätzen folgen, die aus dem vorhergehenden Theorem fliessen, und später ihre Anwendung finden werden.

Erster Zusatz. Wir setzen $G = 1$, $H = V$, unter V das Potential von irgendwie vertheilten elektrischen Massen verstanden, und erhalten:

$$\int \Delta^2 V\,dk = \int \frac{dV}{dn}\,ds$$

oder wenn die Quantität der von der Fläche s umschlossenen Elektricität durch Q bezeichnet wird:

$$4\pi Q = -\int \frac{dV}{dn}\,ds.$$

Das letzte Integral verschwindet im Besonderen, wenn die das Potential V erzeugenden Massen ganz ausserhalb der Fläche s liegen.

Zweiter Zusatz. Nimmt man für G und H eine und dieselbe Potentialfunction V, so liefert der Hauptsatz, wenn die im Elemente herrschende Dichtigkeit durch ϱ bezeichnet wird:

$$4\pi\int \varrho V\,dk = \int\left(\frac{dV}{dN}\right)^2 dk - \int V\frac{dV}{dn}\,ds.$$

Wenn die elektrischen Massen ganz ausserhalb der Fläche s liegen und überdies auf der ganzen Fläche das Potential einen

constanten Werth annimmt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf den zunächst vorhergehenden Zusatz:

$$\int \left(\frac{dV}{dN}\right)^2 dk = 0.$$

Hieraus folgt aber, dass in diesem Falle $\frac{dV}{dN}$ innerhalb der Fläche s verschwindet, und folglich in der ganzen Ausdehnung des von ihr begrenzten Raumes das Potential denselben Werth wie auf der Fläche selbst hat.

Dritter Zusatz. Wenn man in dem Hauptsatze H mit G vertauscht, und die so gewonnene Gleichung von der ursprünglichen abzieht, findet man:

$$\int G \Delta^2 H\, dk - \int H \Delta^2 G\, dk = \int G . \frac{dH}{dn} ds - \int H . \frac{dG}{dn} ds.$$

Setzen wir nun für H eine Potentialfunction V und für G die reciproke Entfernung $\frac{1}{r}$ von einem Punkte, so kommt, wenn erstlich dieser Punkt ausserhalb der Fläche s liegt:

$$\text{I.} \quad \int \frac{\Delta^2 V}{r} dk = \int \frac{\frac{dV}{dn}}{r} ds - \int V \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds.$$

Wenn r zweitens die Entfernung von einem Punkte bedeutet, der innerhalb der Fläche s liegt, so darf der Hauptsatz nicht so wie im ersten Falle in Anwendung kommen, da jetzt die Function $\frac{1}{r}$ für den gedachten Punkt, also im Innern der Fläche s unendlich gross wird. Legt man aber jetzt um das Centrum der r eine Hülfskugel σ, so kann der Satz auf den Raum in Anwendung kommen, der von den Flächen s und σ begrenzt wird und man hat, wenn $d\nu$ das Element der Normale der Hülfskugel ist, für den gedachten Raum:

$$\int \frac{\Delta^2 V}{r} dk = \int \frac{\frac{dV}{dn}}{r} ds - \int \frac{\frac{dV}{d\nu}}{r} d\sigma$$

$$- \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds + \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\nu} d\sigma.$$

Man sieht aber leicht ein, dass, wenn der Radius der Hülfskugel immer kleiner und kleiner genommen wird, das Integral $\int \frac{\frac{dV}{dv}}{r} d\sigma$ sich der Grenze 0 nähert, das Integral $\int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma}{dv}$ aber der Grenze $-4\pi V$, wenn V der Werth des Potentiales im Centrum der r ist. Man hat hiernach, wenn das Centrum der r innerhalb der Fläche s liegt, übrigens aber das Integral mit dk sich auf den ganzen von s umschlossenen Raum bezieht:

$$\text{II.} \quad \int \frac{\Delta^2 V}{r} dk = \int \frac{\frac{dV}{dn}}{r} ds - \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds - 4\pi V.$$

An den obigen ungemein fruchtbaren Satz reihen wir einige Bemerkungen.

Erste Bemerkung. Wenn die Fläche s die elektrischen Massen, welche das Potential V erzeugen, umschliesst, so geht das Integral $\int \frac{\Delta^2 V}{r} dk$ in $-4\pi V$ über. Man hat daher, wenn das Centrum der r ausserhalb der Fläche s liegt:

$$\text{I.} \quad -4\pi V = \int \frac{\frac{dV}{dn}}{r} ds - \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds.$$

Und für jeden Punkt innerhalb der Fläche ist:

$$\text{II.} \quad \int \frac{\frac{dV}{dn}}{r} ds = \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds.$$

Liegen die elektrischen Massen, welche das Potential V erzeugen, in einer Schale, die von zwei Flächen s, s' begrenzt wird, von denen die eine die andere umschliesst, so hat man für jeden Punkt ausserhalb der äusseren Grenzfläche oder im Inneren der Höhlung:

$$\text{I.} \quad -4\pi V = \int \frac{\frac{dV}{dn}}{r} ds + \int \frac{\frac{dV}{dn'}}{r} ds' - \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds$$
$$- \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn'} ds'.$$

Und für die im Inneren der Schale gelegenen Punkte ist:

$$\text{II.} \quad \int \frac{\frac{dV}{dn}}{r}\, ds + \int \frac{\frac{dV}{dn'}}{r}\, ds' = \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, ds + \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn'}\, ds'.$$

Jedesmal sind aber hier die Normalen in der Richtung von dem Inneren der Schale nach aussen hin gerechnet, also einmal in den die Schale umgebenden Raum und das anderemal in die von der Schale gebildete Höhlung hinein.

Nehmen wir für die umschliessende Fläche, welche s' sei, eine Kugelfläche, und lassen wir ihren Radius ins Unbegrenzte wachsen, während ihr Mittelpunkt im Endlichen verbleibt, so nähern sich die auf jene zu beziehenden Integrale der Null. Hiernach hat man, wenn das Potential V von elektrischen Massen herrührt, die ausserhalb der Fläche s liegen, für die im Inneren dieser Fläche gelegenen Punkte:

$$\text{I.} \quad 4\pi V = \int \frac{\frac{dV}{dn}}{r}\, ds - \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, ds,$$

wo die Normale von innen nach aussen gerechnet ist, und für den ausserhalb der Fläche gelegenen Raum ist wiederum:

$$\text{II.} \quad \int \frac{\frac{dV}{dn}}{r}\, ds = \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, ds.$$

Zweite Bemerkung. Für die Fläche s werde eine Sphäre vom Radius R und deren Mittelpunkt zum Centrum der r genommen. Wenn alsdann die Massen, welche das Potential V hervorrufen, ganz ausserhalb der Kugel liegen, so ist nach II. für den Mittelpunkt der Kugel:

$$4 R^2 \pi V = \int V ds.$$

Und wenn die elektrischen Massen sich ganz innerhalb der Kugel befinden, so kommt, unter Q die Quantität jener Massen verstanden, nach Gleichung II. und zufolge des ersten Zusatzes:

$$4 R \pi Q = \int V ds.$$

Die in der ersten Gleichung ausgesprochene Eigenschaft der Kugel kommt bei dem Beweise des folgenden wichtigen

Satzes in Anwendung: Wenn elektrische Massen innerhalb einer geschlossenen Fläche so vertheilt sind, dass sie auf letzterer ein constantes Potential erzeugen, so liegt der Werth des Potentiales ausserhalb der Fläche zwischen Null und dem Werthe, den es auf der Fläche hat.

Um die Richtigkeit dieses Satzes darzuthun, zeigen wir zuerst, dass die Werthe des Potentiales (V) ausserhalb und auf der Fläche (S) gleiche Vorzeichen haben. Das Potential auf der Fläche habe etwa den positiven Werth A und man nehme an, in einem ausserhalb der Fläche gelegenen Punkte P habe es den negativen Werth $-B$. Zieht man von dem Punkte P aus einen Strahl, und trifft dieser die Fläche in P', so verläuft das Potential, wenn man von P nach P' fortschreitet, in stetiger Weise von $-B$ bis A. Trifft aber der Strahl die Fläche nicht, so verläuft das Potential, wenn man auf ihm von P bis ins Unendliche fortschreitet, von $-B$ bis 0. Es folgt hieraus, dass das Potential auf jedem von P ausgehenden Strahle in einem gewissen Punkte M einen beliebig zwischen 0 und $-B$ angenommenen Werth $-B'$ aufweist. Die Punkte M bilden eine geschlossene, ausserhalb der elektrischen Massen befindliche Fläche, und da nun auf dieser das Potential der letzteren den constanten Werth $-B'$ hat, so müsste letzterer auch innerhalb der Fläche, also auch in P auftreten, was gegen die Unterstellung wäre. Das Potential ist folglich ausserhalb der Fläche S positiv, wenn es auf S selbst positiv ist. Analoges gilt, wenn das Potential negativ ist.

Nähme man ferner an, das Potential könne ausserhalb der Fläche S einen Werth erlangen, der den Werth A auf der Fläche an absoluter Grösse übertrifft oder ihm gleichkommt, so leuchtet ein, dass es in einem oder mehreren Punkten P ausserhalb der Fläche einen grössten absoluten Werth aufweisen müsste. Beschreibt man nun um einen der Punkte P als Mittelpunkt eine Kugel, welche ganz ausserhalb der Fläche S liegt, so ist für dieselbe, unter B den Potentialwerth im Punkte P verstanden:

$$4 R^2 \pi \cdot B = \int V ds,$$

woraus folgt, dass V auf und in der ganzen Hülfskugel den Werth B haben muss, denn es hat in der ganzen Ausdehnung

des Integrales dasselbe Vorzeichen, und sein absoluter Werth kann nicht grösser als der von B sein. Ein Gleiches ergiebt sich für jede Kugel s', welche ausserhalb der Fläche S liegt, und deren Mittelpunkt in die Kugel s fällt, ferner für jede Kugel s'', welche ausserhalb der Fläche S liegt, und deren Mittelpunkt in die Kugel s' fällt, u. s. f. Offenbar würde hieraus folgen, dass das Potential in dem ganzen ausserhalb der Fläche S gelegenen Raume den Werth B aufweisen müsste. Da dies aber nicht der Fall sein kann, so ist auch die Annahme, der absolute Werth des Potentiales könne in einem ausserhalb der Fläche befindlichen Punkte den absoluten Werth auf der Fläche übertreffen oder ihm gleichkommen, unzulässig; der absolute Werth des Potentiales ausserhalb der Fläche ist mithin nothwendig kleiner als auf der Fläche.

Litteratur. Green. An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. Band XXXIX, XLIV, XLVII.

Gauss. Untersuchungen über die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte 1840.

III.

VOM GLEICHGEWICHTE DER ELEKTRICITÄT IN EINEM VOLLKOMMEN LEITENDEN KÖRPER.

1. Allgemeine Betrachtungen.

a. Eine Vertheilung elektrischer Massen, wie sie im Vorhergehenden unterstellt wurde, kann dauernd offenbar nur bei idioelektrischen Körpern, niemals aber bei einem Conductor stattfinden. Sobald nämlich die kubische Dichtigkeit einer elektrischen Ladung innerhalb eines begrenzten Raumes nicht verschwindet, so bedingt diese Ladung in jenem Raume eine Scheidungskraft, dargestellt durch $\frac{dV}{dN}$, die nur bei Isolatoren den Gleichgewichtszustand nicht ändern würde, in einem Conductor aber aus einem neutralen Zustande beide elektrische Fluida ausscheiden würde. In dem Inneren eines Conductors ist daher nothwendig die Dichtigkeit der Elektricität gleich Null, wenn elektrisches Gleichgewicht eingetreten ist, und die einem Conductor mitgetheilte Ladung kann, wenn dies überhaupt möglich ist, nur dadurch in den Gleichgewichtszustand gelangen, dass sie sich in einer unendlich dünnen Schicht über die Oberfläche des Conductors ausbreitet, überdies muss aber nothwendig die Vertheilung, oder Anordnung der Ladung eine solche sein, dass

in dem Inneren des Leiters $\frac{dV}{dN}$ verschwindet, und folglich das Potential der Ladung innerhalb dieses Raumes einen und denselben Werth annimmt.

b. Eine unendlich dünne, über eine Oberfläche ausgebreitete elektrische Schichte kann als die Grenze angesehen werden, welcher sich die Ladung eines schalenförmigen Raumes nähert, wenn die beiden Grenzflächen sich einander ins Unbegrenzte nähern. Bewahrt hierbei die Quantität der Ladung einen endlichen Werth, so wächst die Dichtigkeit im Allgemeinen über alle Grenzen hinaus. Bezeichnen wir in demselben Falle durch ds das Element einer Fläche s, welcher sich die beiden Grenzflächen der Schale nähern, so können wir durch $\varrho \cdot ds$ die Elektricitätsmenge darstellen, welche sich schliesslich auf jenem Elemente vorfindet. Die Grösse ϱ, welche im Allgemeinen einen endlichen Werth haben wird, heisst die Flächendichtigkeit, oder auch schlechtweg die Dichtigkeit der über die Fläche s ausgebreiteten Ladung. Was das Potential der Schale betrifft, so nähert es sich, unter r die Entfernung von dem Elemente ds verstanden, der Grenze

$$\int \varrho \frac{ds}{r},$$

und dies ist denn auch das Potential der auf der Fläche s befindlichen Ladung mit der Flächendichtigkeit ϱ. Bei der gemachten Annahme, dass die Quantität der Ladung, d. i. $\int \varrho\, ds$ endlich ist, wird auch das Potential im Allgemeinen endlich sein.

Für das Potential einer Flächenladung gelten alle die Theoreme, welche früher für das Potential der Elektricität, welche einen begrenzten Raum stetig erfüllt, aufgestellt wurden, nur die Bemerkungen, welche über den allgemeinen Verlauf der ersten Differentialquotienten des Potentiales in Bezug auf die Coordinaten und über die Bedeutung des Ausdruckes $\Delta^2 V$ gemacht wurden, verlieren für die Punkte der geladenen Fläche ihre Gültigkeit. Wenn nämlich der Punkt, auf welchen sich das Potential bezieht, aus dem von der Fläche umschlossenen Raume

in den äusseren Raum übertritt, so zeigen die genannten Differentialquotienten in ihrem Verlaufe im Allgemeinen eine Unterbrechung der Stetigkeit. Der Ausdruck $\Delta^2 V$ aber, welcher in jedem ausserhalb oder innerhalb der Fläche gelegenen Punkte verschwindet, hat für die Punkte der Fläche selbst keine bestimmte Bedeutung. Man bemerke jedoch, dass bei der Uebertragung der früher gewonnenen Theoreme an die Stelle des Ausdruckes $\varrho\, dk = -\frac{1}{4\pi}\Delta^2 V dk$ für das Element der Masse der Ausdruck $\varrho\, ds$ zu setzen ist.

Das Potential einer Flächenladung ist im Allgemeinen als Function der Coordinaten für die Punkte ausserhalb der Fläche wesentlich verschieden von dem Potential für die Punkte innerhalb der Fläche. Mit Rücksicht hierauf werden wir in der Folge, wo solches angemessen erscheint, das Potential einer Flächenladung für äussere Punkte durch V, das für innere Punkte durch V' bezeichnen und jenes kürzehalber das äussere, dieses das innere Potential nennen.

Der Werth des äusseren Potentiales fällt mit dem des inneren in jedem Punkte der geladenen Fläche zusammen. Die Steigungen beider Potentiale aber sind im Allgemeinen, wie bemerkt, für denselben Punkt der Fläche verschieden. Zwischen diesen Steigungen und der entsprechenden Dichtigkeit der Ladung besteht eine bemerkenswerthe Beziehung, welche sich unter Anderem aus der Anwendung des Green'schen Satzes (dritter Zusatz, erste Bemerkung) auf eine verschwindend dünne mit Elektricität erfüllte Schale ergiebt. Es werde durch s die Fläche bezeichnet, welcher sich die Grenzflächen der Schale mit abnehmender Dicke nähern und wofür eine der letzteren genommen werden kann, ferner durch n die von innen nach aussen, durch n' die von aussen nach innen gerechnete Normale, endlich durch V und V' die Grenzen, welchen sich das Potential der Schale beziehungsweise im äusseren Raume und im Raume der Höhlung nähert. Alsdann findet man mit Hülfe jenes Satzes für die Grenze, welcher sich das Potential der Schale in beiden genannten Räumen nähert, folgende Form:

$$\int \frac{-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dn}+\frac{dV'}{dn'}\right)ds}{r}.$$

Andererseits haben wir für dieselbe Grenze d. h. für das Potential der auf der Fläche s befindlichen Ladung, wenn ϱ die Flächendichtigkeit dieser Ladung bedeutet, folgenden Ausdruck:

$$\int \frac{\varrho\, ds}{r}.$$

Die Vergleichung der beiden letzten Ausdrücke liefert:

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dn}+\frac{dV'}{dn'}\right).$$

c. Nach den vorhergehenden Bemerkungen über das Potential einer Flächenladung im Allgemeinen können wir, zu den Bedingungen für das elektrische Gleichgewicht eines geladenen Conductors zurückkehrend, schliessen, dass der Ausdruck $\frac{dV}{dN}$ für das Potential der auf der Oberfläche befindlichen Ladung in der ganzen Ausdehnung des Conductors verschwinden müsse. Hieraus folgt dann aber auch ferner, dass das Potential der Ladung allenthalben in und auf dem Conductor einen und denselben Werth aufweisen müsse.

Bei einem Conductor, in dessen Masse sich Höhlungen befinden, bleibt es nach dem Vorhergehenden noch unentschieden, wie sich eine elektrische Ladung, die ihm mitgetheilt wird, auf seine verschiedenen Grenzflächen vertheilen müsse, damit Gleichgewicht stattfinde. Man bemerke aber, dass auf der Grenzfläche einer Höhlung das Potential einen constanten Werth haben muss, und dass demzufolge auch im Inneren der Höhlung derselbe Werth auftreten muss. In dem ganzen von der äussersten Grenzfläche des Conductors umschlossenen Raume und nicht blos in der Masse des Conductors muss folglich das Potential der Ladung constant sein, und hieraus ergiebt sich denn endlich, dass letztere sich nur über die gedachte äusserste Grenzfläche verbreiten kann. Jeder Conductor verhält sich demnach genau so, als ob der ganze Raum seiner äussersten Grenzfläche mit leitender Materie erfüllt wäre; er verhält sich ferner aber auch genau so, als ob er sich auf seine äusserste Grenzfläche,

die wir vorzugsweise Oberfläche nennen wollen, reducirte, diese Grenzfläche als leitend gedacht.

d. Es wirft sich jetzt die Frage auf, ob es in jedem Falle möglich sei, eine gegebene elektrische Ladung in Uebereinstimmung mit den gefundenen Gleichgewichtsbedingungen so über die Oberfläche eines Conductors zu vertheilen, dass ihr Potential innerhalb des Conductors constant wird. Hierüber giebt die Betrachtung eines Ausdruckes Aufschluss, welcher in der Folge noch mehrfache Anwendung finden wird; es ist dies die Summe der Producte aus je zwei Elementen der in Betracht kommenden elektrischen Massen, durch die Entfernung der Elemente dividirt. Bezeichnen wir jene Summe durch W, so ist, wie man leicht einsehen wird:

$$W = \frac{1}{2} \int \varrho \, V ds.$$

Das hier auftretende Integral nennen wir nach der einen der beiden gebräuchlichen Ausdrucksweisen das Potential der elektrischen Massen in Bezug auf sich selbst, oder kürzer das Potential der elektrischen Massen auf sich selbst, und somit ist die zu betrachtende Summe nichts anderes als die Hälfte des letztgenannten Potentiales.

Es leuchtet ein, dass der Ausdruck W unter allen möglichen Werthen, die er annimmt, wenn man die gegebene Ladung auf immer andere und andere Weise vertheilt, wenigstens ein Minimum aufweisen muss. Einerseits nämlich hat er keinen Maximumwerth, indem man ihn dadurch ins Unbegrenzte wachsen lassen kann, dass man die Ladung auf einen immer kleineren und kleineren Flächenraum zusammenzieht. Andererseits aber übertrifft er jedenfalls den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \int \varrho \, ds \int \frac{\varrho \, ds}{R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{R}$$

an Grösse, in welchem R die grösste Dimension der Oberfläche, Q die Quantität der Ladung bedeutet.

Nun muss aber bei derjenigen Vertheilung, bei welcher der Ausdruck W ein Minimum wird, einer beliebigen verschwindend kleinen Variation der Dichtigkeit eine dagegen verschwindende Variation von W entsprechen. Für die gedachte Vertheilung ist also:

$$\delta W = \frac{1}{2}\int(\varrho\,\delta V + V\delta\varrho)\,ds = \int V\delta\varrho\,ds = 0,$$

und diese Gleichung kann für jede beliebige Variation der Dichtigkeit $\delta\varrho$ offenbar nur dann bestehen, wenn V auf der ganzen Oberfläche denselben Werth hat. An die nachgewiesene Existenz des Minimums für den Ausdruck W ist also auch die Möglichkeit geknüpft, die Ladung so über die Fläche zu vertheilen, dass das Potential auf und in der letzteren constant wird.

Bei der soeben näher erörterten Anordnung der Ladung weist die Dichtigkeit allenthalben dasselbe Vorzeichen wie die Quantität der Ladung auf; es bleibt aber auch kein Theil der Oberfläche unbelegt. Letzteres folgt daraus, dass nach dem Früheren das Potential einer elektrischen Masse, die blos über einen Theil der Oberfläche ausgebreitet ist, in allen Punkten ausserhalb der Masse also auch an den unbelegten Stellen der Oberfläche einen kleineren absoluten Werth als auf den belegten Theilen erlangt (Green'scher Lehrsatz, dritter Zusatz).

e. Die Bedingung, dass das Potential der elektrischen Ladung auf der Oberfläche des Conductors constant sei, ist nicht blos nothwendig für das Gleichgewicht, sondern auch hinreichend. Wenn nämlich jener Bedingung durch die unter *c* angegebene Vertheilung genügt wird, so ist die Oberfläche des Conductors eine Gleichgewichtsfläche, die elektrische Wirkung, die von der ganzen Ladung auf die Elektricität eines Flächenelementes ausgeübt wird, findet folglich nach der Normale der Oberfläche statt und zwar in allen Fällen in der Richtung von innen nach aussen. Eine Bewegung der Elektricität in dieser Richtung wird aber durch den Widerstand des den Conductor umgebenden Isolators verhindert.

Die Grösse der Repulsion, welche die Elektricität der Ladung auf sich selbst ausübt, wird gemessen durch $4\pi\varrho^2$, denn für die Wirkung der Ladung auf die Einheit der Elektricität hat man den Werth $-\frac{dV}{dn}$, und ausserdem hat man, da das innere Potential constant ist:

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{dV}{dn}.$$

f. Es giebt nur eine einzige Art der Vertheilung einer gegebenen elektrischen Ladung auf einem gegebenen Conductor, welche das Gleichgewicht zur Folge hat. In der That, es sei ϱ die Dichtigkeit bei einer den Bedingungen des Gleichgewichtes genügenden Anordnung, wie sie nach dem Vorigen jedenfalls existirt, A der entsprechende Werth des Potentiales im Conductor. Bei einer zweiten ebenfalls dem Gleichgewicht entsprechenden Vertheilung derselben Ladung sei ϱ' die Dichtigkeit und A' der Potentialwerth im Conductor. Nun ändert sich, wie leicht einzusehen, der Werth eines Potentiales in demselben Verhältnisse wie die Dichtigkeit der erzeugenden Massen, wenn letztere allenthalben in gleichem Verhältnisse geändert wird.

Wenn wir hiernach über die der Dichtigkeit ϱ und dem Potentiale A entsprechende Ladung unseres Conductors eine zweite Ladung legen, deren Dichtigkeit $-\frac{A}{A'}\varrho'$ ist, so erzeugt letztere das im Conductor constante Potential $-A$ und beide Ladungen bleiben im Gleichgewichte. Wir erhalten so eine Gesammtladung, deren Dichtigkeit $\varrho - \frac{A}{A'}\varrho'$ ist, und deren Potential im Inneren des Conductors und auf dessen Oberfläche den Werth 0 hat. Es ist somit auch ausserhalb des Conductors allenthalben das Potential gleich Null (Green'scher Lehrsatz, dritter Zusatz, zweite Bem.) und es muss daher $\varrho : \varrho' = A : A'$ sein, d. h. die zweite Art der Belegung ist nicht wesentlich von der ersten Art unterschieden. Da aber ferner die Quantitäten der Ladungen gleich sein sollen, so ist:

$$\int \varrho'\, ds = \int \varrho\, ds = \frac{A}{A'} \int \varrho'\, ds$$

und folglich $A = A'$ und $\varrho = \varrho'$.

g. Die Variation des halben Potentiales der Elektricität auf sich selbst, wie sie einer verschwindend kleinen Aenderung der Dichtigkeit oder einer verschwindend kleinen Verschiebung der elektrischen Elemente entspricht, kommt der negativen Arbeit gleich, welche von den zwischen den elektrischen Elementen thätigen Kräften bei jener Aenderung der Anordnung geleistet wird. In dem Falle, wo die elektrische Ladung eines

Conductors im Gleichgewichte ist, verschwindet in Uebereinstimmung mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten derjenige Theil der Variation des halben Potentiales der Elektricität auf sich selbst, welcher ein Unendlichkleines erster Ordnung ist. Der übrige Theil ist im Allgemeinen ein Unendlichkleines zweiter Ordnung und nach dem, was wir oben fanden, eine positive Grösse. Hieraus folgt mit Rücksicht auf das Princip von der Erhaltung der Kraft, welchem zufolge die doppelte geleistete Arbeit dem Gewinne an lebendiger Kraft gleichkommt, dass das elektrische Gleichgewicht, dessen Existenz bewiesen wurde, ein stabiles ist.

h. Sobald die Art und Weise, wie sich irgend eine Ladung von bestimmter Grösse im Falle des Gleichgewichtes über einen Conductor vertheilt, bekannt ist, kann die Anordnung eines gegebenen Quantums auf demselben Conductor, sowie auf jedem ihm ähnlichen Conductor leicht gefunden werden. In der That, wenn ϱ die Dichtigkeit der Ladung Q auf einem bestimmten Oberflächenelemente ist, so wird die Dichtigkeit der Ladung Q' auf demselben Elemente gleich $\frac{Q'}{Q}\varrho$, und die Dichtigkeit der Ladung Q' auf dem homolog gelegenen Elemente eines ähnlichen Conductors, dessen Dimensionen λ mal grösser als die des ersten Conductors sind, wird gleich $\frac{Q'}{\lambda^2 Q}\varrho$.

In der Folge werden wir eine allgemeine Lösung des Problemes, die dem Gleichgewichte entsprechende Ladungsweise eines gegebenen Conductors zu bestimmen, kennen lernen. Die vollständige Durchführung dieser Lösung ist aber in dem einzelnen Falle im Allgemeinen mit grossen Schwierigkeiten verknüpft. Dahingegen bietet jede Niveaufläche das Beispiel eines Conductors dar, für den die Verhältnisse des elektrischen Gleichgewichtes, insbesondere die Dichtigkeit einer elektrischen Ladung ohne Weiteres gefunden werden können. Es sei nämlich V das Potential von elektrischen Massen, S eine Niveaufläche, welche diese Massen ganz einschliesst. Alsdann hat man für jeden ausserhalb der Niveaufläche gelegenen Punkt nach dem hier in Betracht kommenden Green'schen Lehrsatze (dritter Zusatz):

$$V = \int \frac{-\frac{1}{4\pi} \cdot \Delta^2 V}{r} dk = \int \frac{-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dN}}{r} dS.$$

Hieraus folgt aber, dass wenn die Niveaufläche mit Elektricität von der Dichtigkeit $-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dN}$ belegt wird, diese Elektricität ausserhalb der Fläche das Potential V erzeugt, welches dann auf der Fläche selbst constant ist. Die Quantität der so erhaltenen Ladung ist gleich der Quantität der elektrischen Massen, welche das Potential V erzeugen (erster Zusatz des Green'schen Lehrsatzes). Wir lassen eine Reihe von Beispielen des elektrischen Gleichgewichtes folgen, die sich auf dem oben angezeigten Wege herleiten lassen.

2. Beispiele von elektrischem Gleichgewichte auf isolirten Conductoren.

a. Aus dem Potential einer punktförmigen elektrischen Masse ergiebt sich die Bedingung für das elektrische Gleichgewicht auf einem sphärischen Conductor, welche freilich auch unmittelbar leicht gefunden werden kann. Wenn Q die Masse, r die Entfernung von der Masse bedeutet, so ist ihr Potential $\frac{Q}{r}$. Die Niveauflächen sind Kugeln, deren gemeinsames Centrum in der Masse liegt. Der Ausdruck $\frac{dV}{dN}$, die Steigung des Potentials, ist gleich $-\frac{Q}{r^2}$ und hat mithin für alle Punkte einer Niveaufläche denselben Werth. Hiernach breitet sich eine elektrische Ladung, welche einem isolirten sphärischen Conductor mitgetheilt wird, gleichförmig über die Oberfläche aus. Wird die Quantität der Ladung durch Q, ihre Dichtigkeit durch ϱ und der Radius des Conductors durch R bezeichnet, so kommt:

$$\varrho = \frac{Q}{4\pi R^2},$$

und für einen ausserhalb des Conductors gelegenen Punkt wird

das Potential, wenn r die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte des Conductors bedeutet:

$$V = \frac{Q}{r}.$$

Auf und in dem Conductor aber weist das Potential den Werth $\frac{Q}{R}$ auf.

Das System der Kraftlinien besteht aus den ins Unendliche verlängerten Radien des Conductors.

Wir überlassen es dem Leser, das Potential näher zu betrachten, welches bei zwei gleich- oder ungleichnamigen, gleichgrossen und in Punkte concentrirten elektrischen Massen auftritt. Die Kraftlinien desselben sind die sogenannten magnetischen Curven.

b. Für das Potential einer begrenzten geraden Linie, die gleichförmig mit Elektricität belegt ist, findet man, wenn Q die Quantität der Ladung, $2a$ die Länge der Linie, t die Entfernung von derselben und z die Entfernung von der Mittelebene ihrer Endpunkte ist:

$$V = \frac{Q}{2a} \log \frac{\sqrt{t^2 + (z-a)^2} - (z-a)}{\sqrt{t^2 + (z+a)^2} - (z+a)}$$

$$= \frac{Q}{2a} \log \frac{\sqrt{t^2 + (z+a)^2} + (z+a)}{\sqrt{t^2 + (z-a)^2} + (z-a)},$$

oder auch, unter a' die halbe grosse Axe eines verlängerten Rotationsellipsoides verstanden, dessen Brennpunkte in die Endpunkte der belegten geraden Linie fallen, und das durch den Punkt geht, auf welchen sich das Potential bezieht:

$$V = \frac{Q}{2a} \log \frac{a' + a}{a' - a}.$$

Hiernach sind die Niveauflächen verlängerte Revolutionsellipsoide, die zu gemeinsamen Brennpunkten die Endpunkte der Linie haben und giebt somit obiges Potential über die Anordnung der Elektricität auf einem leitenden verlängerten Revolutionsellipsoide Aufschluss. Die Ausrechnung des Ausdrucks $\frac{dV}{dn}$ ergiebt, dass die Dichtigkeit proportional mit dem senkrechten Abstande eines Ellipsoides ist, das mit dem Conductor

concentrisch, ähnlich und ähnlich gelegen ist und demselben unendlich nahe liegt.

c. Auch bei dem ungleichaxigen Ellipsoide ist die Dichtigkeit einer elektrischen Ladung dem Abstande eines unendlich nahen ähnlichen Ellipsoides proportional, das dem ersten concentrisch und ähnlich gelegen ist, eine Beziehung, welche leicht direct gefunden werden kann. Man kann hiernach die Ladung als eine gleichförmige Ausfüllung der unendlich dünnen Schale, welche von den beiden genannten Ellipsoiden begrenzt wird, ansehen. Nun lässt sich aber zeigen, dass das Potential einer solchen homogenen ellipsoidischen Schale in einem äusseren Punkte denselben Werth hat, wie das innere Potential einer zweiten homogenen Schale, die durch den fraglichen Punkt geht, mit der ersten Schale homofocal ist und dieselbe Masse enthält, wie die erste. Durch diesen Satz wird das äussere Potential eines geladenen Ellipsoides auf die Berechnung des Potentiales einer ellipsoidischen Schale oder auch eines vollen Ellipsoides im Centrum der Schale oder des Ellipsoides zurückgeführt. Werden die Halbaxen des Conductors durch a, b, c bezeichnet, sowie durch a', b', c' die eines homofocalen Ellipsoides, das durch einen äusseren Punkt P geht, wird ferner die Quantität der Ladung durch Q dargestellt, zur Abkürzung

$$a^2 - b^2 = \beta^2, \quad a^2 - c^2 = \gamma^2$$

gesetzt, so ergiebt sich nach dem Obigen für das Potential im Punkte P:

$$V = \frac{Q}{\gamma} F\left(\frac{\beta}{\gamma}, arc\ sin\ \frac{\gamma}{a'}\right),$$

wo der letzte Factor der gewöhnlichen Bezeichnungsweise gemäss die elliptische Function erster Art mit dem Modulus $\frac{\beta}{\gamma}$ und der Amplitude $arc\ sin\ \frac{\gamma}{a'}$ bedeutet.

Was die Dichtigkeit betrifft, so sei p die Länge des Perpendikels, welches aus dem Mittelpunkte des Conductors auf eine seiner Tangentialebenen herabgelassen wird. Alsdann findet

man für die in dem Berührungspunkte der Tangential-Ebene herrschende Dichtigkeit:

$$\varrho = \frac{Qp}{4\pi\, abc}.$$

Die Niveauflächen des ellipsoidischen Conductors sind nach dem Obigen ebenfalls Ellipsoide, die untereinander und mit dem Conductor confocal sind. Bekanntlich ordnet sich einer Gruppe homofocaler Ellipsoide E eine Gruppe von homofocalen einschaligen Hyperboloiden H und eine Gruppe von homofocalen zweischaligen Hyperboloiden H' zu, und es schneiden sich drei Flächen E, H und H' unter rechten Winkeln. Hieraus folgt, dass die Durchschnittslinien der Hyperboloide H und H' die Kraftlinien für einen Conductor sind, der von einem der Ellipsoide E begrenzt wird.

Legt man durch einen ausserhalb des Conductors gelegenen Punkt P das homofocale Ellipsoid, an letzteres im Punkte P die Tangentialebene und fällt aus dem Mittelpunkte ein Perpendikel p' auf letztere, so stellt sich, wie man leicht findet, die in P von dem Conductor ausgeübte elektrische Wirkung dar durch:

$$\frac{dV}{dN} = -\frac{Qp'}{a'b'c'}.$$

Für die Punkte auf der Oberfläche des Conductors ergiebt sich hieraus die übrigens allgemein gültige Beziehung:

$$\frac{dV}{dN} = \frac{dV}{dn} = -4\pi\varrho.$$

d. Aus der Anordnung der Elektricität auf einem ellipsoidischen Conductor lässt sich die auf einer ebenen Platte mit elliptischem Umfange ableiten, indem man eine Axe des Conductors verschwinden lässt. Wenn a und b die Halbaxen der Platte sind, und in diese die Axen der x und y gelegt werden, so findet man aus dem Obigen:

$$\varrho = \frac{Q}{4\pi\, ab\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}, \quad V = \frac{Q}{a} F\left(\frac{\beta}{a}, \, arc\, sin\, \frac{a}{a'}\right),$$

wo wiederum a' die der Halbaxe a entsprechende Halbaxe eines Ellipsoides bedeutet, welches mit der Platte homofocal ist und durch den Punkt geht, auf welchen sich das Potential bezieht.

Wenn $a = b$, die Platte also kreisförmig wird, so kommt, unter t die Entfernung vom Centrum verstanden:

$$\varrho = \frac{Q}{4\pi a \sqrt{a^2 - t^2}}, \quad V = \frac{Q}{a} \; arc \; sin \frac{a}{a'}.$$

Ueber die Anordnung der Elektricität auf einer kreisförmigen Scheibe hat Coulomb (Biot, *Traité de physique expérimentale et mathématique*) Versuche angestellt. Die Scheibe war aus Kupfer und hatte einen Radius von 5 Zoll. Für das Verhältniss zwischen der Dichtigkeit ϱ in der Entfernung t vom Mittelpunkte und der Dichtigkeit ϱ_0 in dem Mittelpunkte selbst ergaben sich die in der folgenden Tabelle aufgeführten Werthe. Neben denselben sind die Verhältnisse, wie sie sich aus der theoretischen Formel berechnen, gestellt:

	t	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	4,5	5,0
$\frac{\varrho}{\varrho_0}$	beobachtet	1	1,001	1,005	1,17	1,52	2,07	2,90
	berechnet	1	1,020	1,090	1,25	1,67	2,29	∞

Der experimentellen Bestimmung und Vergleichung elektrischer Dichtigkeiten, auf welche soeben Bezug genommen wurde, liegen die Annahmen zu Grunde, dass die Ladung, welche eine isolirte, verschwindend kleine Kugel annimmt, wenn sie mit einem Conductor in Berührung gebracht wird, verschwindend klein und mit der Dichtigkeit, welche ursprünglich an der Berührungsstelle herrschte, proportional sei. Die Richtigkeit der ersten Annahme springt in die Augen, und für die Zulässigkeit der zweiten Annahme spricht wenigstens der Erfolg elektrometrischer Versuche. Es werde nun eine bestimmte Stelle eines Conductors mit einer isolirten, nicht geladenen Kugel von relativ sehr kleinem Durchmesser, einer sogenannten Prüfungskugel, berührt. Man bringe letztere hierauf in die Drehwage, so dass sie mit der Kugel des Wagebalkens zur Berührung kommt. Die Ladung der Prüfungskugel vertheilt sich auf die beiden Kugeln in einem bestimmten Verhältniss, welches von dem Verhältniss der Radien beider Kugeln abhängt. Die bewegliche Kugel wird

von der nun festen Prüfungskugel abgestossen, und der Wagebalken sucht eine neue Gleichgewichtslage auf. Für letztere sei d die Entfernung beider Kugeln, θ der Torsionswinkel; alsdann hat man, wenn ϱ die zu bestimmende Dichtigkeit, x eine von dem Radius der Prüfungskugel und der Beschaffenheit der Drehwage abhängige Constante bedeutet:

$$\varrho^2 = x d^2 \theta.$$

Hiernach lassen sich elektrische Dichtigkeiten durch Messungen der beschriebenen Art vergleichen, ohne dass man nöthig hätte, die Grösse x zu ermitteln. Handelt es sich aber darum, elektrische Dichtigkeiten, wie sie gleichzeitig auf einem und demselben, oder auf verschiedenen Conductoren auftreten, zu vergleichen, so muss der Umstand berücksichtigt werden, dass die Ladung eines Conductors im Verlaufe der Zeit an Grösse abnimmt, weil niemals eine vollkommene Isolirung stattfindet. Annähernd darf man für kleinere Zeiträume annehmen, dass das Differential der Ladung mit der Ladung proportional ist. Man hat also, wenn ϱ_0, ϱ die den Zeiten t_0, t entsprechenden Dichtigkeiten an einer bestimmten Stelle des Conductors sind:

$$\varrho = \varrho_0 \, e^{-\lambda(t-t_0)},$$

wo λ einen von der Form des Conductors, von der Art seiner Isolirung und von dem Zustande der umgebenden Luft abhängigen Coefficienten bedeutet. Mit Hülfe der letzten Formel lassen sich die Ergebnisse gehörig angeordneter, aufeinander folgender Messungen auf denselben Zeitpunkt reduciren.

Hinsichtlich der Beurtheilung der Zuverlässigkeit, welche das oben angedeutete elektrometrische Verfahren hat, verweisen wir den Leser auf Riess (Die Lehre von der Reibungselektricität) und Hankel (Elektrische Untersuchungen. Abhandl. der K. Sächs. Ges. d. Wissensch. V.).

e. Das Potential einer begrenzten geraden Linie, die man so mit Elektricität belegt hat, dass die Dichtigkeit mit der Entfernung von einem auf der Verlängerung der Linie gelegenen Punkte O proportional ist, kann leicht berechnet werden. Durch z werde die Entfernung von der durch den genannten Punkt senkrecht auf die Linie gelegten Ebene bezeichnet, durch z_1, z_2 die Werthe von z für die Endpunkte der Linie, durch r_1, r_2 die

Entfernungen von jenen Endpunkten und endlich durch Q die Quantität der aufgetragenen Elektricität. Alsdann findet man für das Potential:

$$V = \frac{2\,Q}{z_2^2 - z_1^2} \left\{ r_2 - r_1 + z \log \frac{r_2 + z_2 - z}{r_1 + z_1 - z} \right\}.$$

Die Niveauflächen dieses Potentiales sind Revolutionsflächen, deren gemeinsame Axe die belegte Linie ist. Keine von ihnen hat mit einer andern einen Punkt gemein, und jede schliesst alle diejenigen Flächen ein, welche einem grösseren absoluten Potentialwerthe entsprechen. Der absolute Werth des Potentiales aber nimmt in stetiger Weise von ∞ bis 0 ab, wenn man, von einem Punkte der belegten Linie ausgehend, auf einer geraden Linie ins Unendliche fortschreitet. In dem besonders interessanten Falle, wo z_1 verschwindet, also auch in dem entsprechenden Endpunkte O der belegten geraden Linie die Dichtigkeit verschwindet, wird der Potentialwerth für diesen Punkt unbestimmt, und gehen durch den Punkt alle Niveauflächen, deren Potentialwerth den Ausdruck $\frac{2\,Q}{z_2}$ an absoluter Grösse übertrifft, so wie diejenige Fläche, deren Potentialwerth jenem Ausdrucke gleichkommt. Die Meridiancurve der erstgenannten Flächen besitzt zwei Wendepunkte und einen Rückkehrpunkt, welcher in den Endpunkt O der belegten geraden Linie fällt. Die Fläche mit dem Potentialwerth $\frac{2\,Q}{z_2}$ ist allenthalben convex-convex und eiförmig. Ihre Krümmung nimmt nach dem spitzen Ende hin zu und wird in dem Pole O dieses Endes unendlich gross. Was endlich die Flächen mit kleinerem Potentialwerthe betrifft, so sind dieselben gleichfalls eiförmig, ihre Krümmung aber ist allenthalben endlich.

Die Ausrechnung des Ausdruckes $\frac{dV}{dN}$ lässt ersehen, dass auf einem Conductor, welcher von einer der Niveauflächen mit auswärts gekehrter Spitze begrenzt wird, die elektrische Dichtigkeit nach der Spitze hin wächst und in der Spitze selbst unendlich gross wird, obgleich sowohl das Potential wie auch die Quantität der Ladung einen endlichen Werth hat. Auch auf

der Fläche mit dem Potentialwerth $\frac{2Q}{z_2}$ wächst die Dichtigkeit nach dem Pole O hin ins Unbegrenzte.

f. Eine Kugelfläche, deren Radius R sei, werde so mit elektrischer Materie belegt, dass die Dichtigkeit gleich $m \sin \frac{1}{2} \varphi^2$ wird, unter m eine Constante und unter φ die Winkeldistanz von einem als Pol angenommenen Punkte verstanden. Die Quantität dieser Ladung beträgt $2 m \pi R^2$ und für das Potential in einem ausserhalb der Kugel gelegenen Punkte ergiebt sich:

$$2 m \pi R \left(\frac{R}{t}\right) - \frac{2}{3} m \pi R \cos \varphi \left(\frac{R}{t}\right)^2,$$

wo t die Länge der Linie, welche den Punkt mit dem Mittelpunkte der Kugel verbindet, und φ den Winkel zwischen dieser Linie und dem Radius des Poles bedeutet.

Ausser der erwähnten Ladung werde noch eine zweite, deren Quantität $- \frac{2}{3} m \pi R^2$ ist, gleichförmig über die Kugel ausgebreitet. Alsdann erhält man für das äussere Potential der gesammten Elektricität, wenn noch die Quantität der letzteren, d. i. $\frac{4}{3} m \pi R^2$ durch Q bezeichnet wird:

$$V = Q \left(\frac{1}{t} - \frac{R \cos \varphi}{2 t^2}\right).$$

Von den Niveauflächen dieses Potentiales verdient diejenige eine besondere Beachtung, welche dem Potentialwerthe $\frac{Q}{2R}$ entspricht. Der Theil dieser Fläche, welcher ausserhalb der Kugel liegt und letztere ganz umschliesst, hat als Meridiancurve ein allenthalben convexes Oval, welches eine nach innen gekehrte Spitze darbietet. In dieser Spitze schneiden sich die zusammentreffenden Theile unter einem nach aussen hin stumpfen Winkel, dessen Halbirungslinie mit der Revolutionsaxe der Fläche, d. i. dem Radius zusammenfällt, von welchem aus die Winkel φ gerechnet werden; die Spitze selbst liegt auf der Kugel. Die Betrachtung des Ausdruckes $\frac{dV}{dN}$ führt zu dem Resultate, dass auf einem Conductor, welcher von der gedachten Niveaufläche begrenzt wird, die Dichtigkeit in dem der Spitze

gegenüberliegenden Pole ihren grössten Werth hat, von jenem Punkte an stetig abnimmt und in der eingestülpten Spitze verschwindet.

g. Wir wollen endlich hier einige allgemeine Beziehungen für das elektrische Gleichgewicht auf zwei Conductoren, welche durch einen verschwindend dünnen leitenden Draht miteinander verbunden sind, ableiten. Wir denken uns zunächst die Querdimensionen des Drahtes als endlich. Wenn wir dieselben alsdann an Grösse abnehmen lassen, so nähert sich die Quantität der auf dem Drahte befindlichen Elektricität der Null. Behielte nämlich die Ladung einen endlichen Werth, so näherte sich ihr inneres Potential dem einer Linie, welche mit einem endlichen Quantum belegt ist. Ein solches Potential ist aber im Allgemeinen für die Punkte der Linie unendlich gross, während doch das innere Potential der Ladung des Drahtes endlich sein muss, da das innere Potential der Gesammtladung es ist. Das äussere Potential der Ladung des Drahtes nähert sich, wenn die Querdimensionen kleiner und kleiner werden, in jeder endlichen Entfernung vom Drahte ebenfalls, wie aus dem über die Ladung Gesagten folgt, der Grenze Null. Hiernach ist von der Ladung des Drahtes abzusehen und das elektrische Gleichgewicht an die Bedingung geknüpft, dass das Potential der Ladungen beider Conductoren im Inneren einen und denselben Werth aufweise. Wenn der Draht nicht verschwindend dünn, sondern sehr dünn ist, so wird die Dichtigkeit in allen Punkten der Conductoren, deren Entfernung vom Drahte im Vergleich mit seinen Querdimensionen sehr gross ist, mit der Dichtigkeit, wie sie sich aus obiger Bedingung bestimmt, sehr nahe übereinkommen.

Wenn die Dimensionen eines der beiden Conductoren über alle Grenzen hinaus wachsen, während die Quantität der Ladung des Systems ungeändert bleibt, so nähert sich das Potential der Gesammtladung, oder wie wir kürzehalber sagen wollen, das Gesammtpotential der Grenze Null, und derselben Grenze nähert sich auch die Ladung des zweiten Conductors. Es seien nämlich Q_1, Q_2 die Ladungen des ersten und zweiten Conductors. Die grösste Kugel, welche in den ersten Conductor gelegt werden kann, habe den Radius R_1, und die kürzeste der gera-

den Linien, welche von ihrem Mittelpunkte nach einem Punkte des zweiten Conductors gezogen werden können, sei D_1. Die kleinste von allen Kugeln, welche um den zweiten Conductor gelegt werden können und deren Mittelpunkte in demselben liegen, habe den Radius R_2' und die längste der Linien, welche von ihrem Mittelpunkte nach einem Punkte des ersten Conductors gezogen werden können, sei D_2'. Endlich sei V' der Werth des inneren Gesammtpotentiales. Alsdann hat man, da die Dichtigkeit allenthalben dasselbe Vorzeichen aufweist:

$$\frac{Q_2}{R_2'} + \frac{Q_1}{D_2'} < V' < \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{D_1}.$$

Hieraus folgen aber sofort die oben aufgestellten Beziehungen, wenn man noch bemerkt, dass D_1 und D_2' grösser als R_1 sind.

Aus dem Obigen lässt sich entnehmen, was eintreten werde, wenn man einen ursprünglich isolirten und geladenen Conductor durch einen leitenden Metalldraht mit der Erde verbindet. Insofern die Dimensionen der letzteren im Vergleich mit den Dimensionen des Conductors als unendlich gross angesehen werden können, muss die ganze Ladung des Conductors nach der Erde hin abgeleitet werden. In dem Conductor wie in der Erde erlangt das Potential den Werth Null. Letzteres findet auch dann statt, wenn etwa auf den Conductor und die Erde noch andere elektrische Massen einwirken, indem das Potential einer jeden endlichen Ladung der Erde merklich verschwinden muss.

Wenn die beiden Conductoren so weit voneinander entfernt werden, dass ihre kürzeste Entfernung im Vergleich mit ihren Dimensionen sehr gross wird, so nähert sich das Gesammtpotential im Inneren eines Conductors dem Potentiale der Ladung desselben Conductors. In erster Annäherung darf alsdann angenommen werden, dass sich die Ladung des einzelnen Conductors so anordne, als ob der andere Conductor nicht vorhanden wäre und dass sie für sich im Gleichgewichte ist. Es sei nun Q die Gesammtladung, Q_1 die Ladung des ersten, Q_2 die des zweiten Conductors, und A_1, A_2 seien die inneren Potentiale, welche die Ladung Eins erzeugen würde, wenn sie bezüglich über den ersten und zweiten Conductor so ausgebreitet würde, dass sie für sich im Gleichgewichte ist. Alsdann hat man:

$$A_1 Q_1 = A_2 Q_2, \quad Q_1 + Q_2 = Q.$$

Hieraus bestimmen sich die Quantitäten der Ladungen wie folgt:

$$Q_1 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} Q, \quad Q_2 = \frac{A_1}{A_1 + A_2} Q.$$

Wenn die Conductoren sphärisch sind, so verhalten sich diesen Formeln zufolge ihre Ladungen zueinander wie die Radien, eine Beziehung, deren man sich bedienen könnte, um ein gegebenes elektrisches Quantum in beliebigem Verhältnisse zu fractioniren.

IV.

VON DER DURCH FESTE ELEKTRISCHE MASSEN BEI EINEM EINZELNEN LEITER BEWIRKTEN INDUCTION DER ELEKTRICITÄT.

1. Allgemeine Betrachtungen.

a. Das elektrische Gleichgewicht eines isolirten Conductors muss nothwendig gestört werden, sobald letzterer der Einwirkung elektrischer Massen ausgesetzt wird, mag nun der Conductor ursprünglich sich im neutralen Zustande befunden haben, oder mit einem gewissen Quantum Elektricität geladen gewesen sein. Die Wirkung der elektrischen Massen, die wir hier als fest, etwa als Ladung eines ausserhalb des Conductors befindlichen idioelektrischen Körpers betrachten wollen, wird sich in dem Falle, dass der Conductor nicht geladen ist, dadurch äussern, dass in dem Conductor eine Scheidung des positiven und negativen Fluidums stattfindet, und ein Gleichgewichtszustand dann und nur dann eintreten, wenn von jenen Fluidis solche Quantitäten ausgeschieden und letztere so über die Oberfläche des Conductors vertheilt werden, dass ihr Potential zusammen mit dem Potential der festen elektrischen Massen im Inneren des Conductors einen constanten Werth aufweist. Wenn aber der Conductor ursprünglich geladen ist, so leuchtet ein, dass wenn wir diese Ladung ungeändert lassen, und zu derselben die Ladung fügen, welche stattfände, wenn der Conductor ursprünglich neutral gewesen wäre, ein Zustand resultirt, bei dem das elektrische Gleichgewicht bestehen muss. Die so erhaltene

neue und durch das Idioelektricum bedingte Ladung kann als eine von der gewöhnlichen Gleichgewichtsvertheilung abweichende Anordnung der ursprünglichen Ladung betrachtet werden, indem offenbar die Quantität der neuen Ladung genau dieselbe wie die der ursprünglichen ist. Von der Ladung, welche man um den Gleichgewichtszustand bei Gegenwart des Idioelektricums zu erhalten, zu der gewöhnlichen und ursprünglichen Gleichgewichtsladung hinzufügen muss, sagt man, dass sie durch das Idioelektricum auf dem Conductor inducirt worden sei, und nennt die durch diese Induction erzeugte Elektricität auch Influenz-Elektricität.

Wir wollen jetzt zeigen, dass eine gegebene Ladung des Conductors stets so, wie die Bedingung des Gleichgewichtes es erfordert, vertheilt werden könne. Zuvörderst bemerken wir, dass der Beweis nur für eine bestimmte Ladung geführt zu werden braucht. Hat man nämlich eine jener Bedingung genügende Vertheilung der Ladung Q gefunden, so ergiebt sich die Vertheilung einer zweiten Ladung Q' leicht wie folgt. Die Quantität Q' theilen wir in die beiden Theile Q und $Q' - Q$. Jenen ersten Theil ordnen wir nach der erstgefundenen Weise an, den zweiten Theil aber so, dass er für sich innerhalb des Conductors ein constantes Potential erzeugt. Beide Vertheilungen zusammen machen alsdann einen Zustand aus, wobei die Quantität der Ladung den gegebenen Betrag hat, und der Bedingung des Gleichgewichtes genügt wird. Dass es aber stets eine Ladung des influencirten Conductors giebt, welche der Bedingung des Gleichgewichtes genügt, kann durch Betrachtung des halben Potentiales der gesammten in Betracht kommenden Elektricität auf sich selbst wie folgt erwiesen werden.

Es sei ϱ die Dichtigkeit, U das Potential einer Ladung des Conductors, V das Potential des Idioelektricums und w das halbe Potential des Idioelektricums auf sich selbst. Man hat alsdann für das halbe Potential der gesammten Elektricität auf sich selbst:

$$W = w + \int \varrho \left(\frac{1}{2} U + V\right) \cdot ds.$$

Wir wollen nun annehmen, die Dichtigkeit auf dem Conductor weise allenthalben dasselbe, etwa das positive Vorzeichen auf und werde auf immer andere und andere Weise variirt, so

jedoch, dass ihr Vorzeichen nicht umgekehrt wird. Ueberdies wollen wir annehmen, dass hierbei $1/2\, U + V$ auf der ganzen Oberfläche des Conductors positiv sei, was offenbar stets durch eine schickliche Annahme über die Quantität der Ladung erzielt werden kann. Alsdann leuchtet ein, dass der Ausdruck W zwar ins Unbegrenzte wachsen kann, andererseits aber für eine oder mehrere Vertheilungen einen kleinsten Werth darbieten muss. Für eine solche Vertheilung ist dann, da die Grösse w constant ist:

$$\delta W = \int (U + V)\, \delta \varrho\, ds = 0,$$

woraus folgt, dass das Gesammtpotential $U + V$ auf und in dem Conductor einen und denselben Werth hat. In der That kann also die betrachtete und folglich auch jede beliebige Ladung des influencirten Conductors so angeordnet werden, dass Gleichgewicht eintritt. Es lässt sich aber ferner in ähnlicher Weise wie bei der gewöhnlichen Gleichgewichtsvertheilung zeigen, dass es nur eine einzige Anordnung dieser Art giebt und dass das entsprechende Gleichgewicht ein stabiles ist.

Man bemerke noch, dass die Grösse δW nichts anderes ist, als die negative bei der Variation $\delta \varrho$ geleistete Arbeit der elektrischen Kräfte, oder die jener Variation entsprechende negative Summe der virtuellen Momente, die dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten zufolge verschwinden muss, wenn Gleichgewicht herrscht.

Unter den verschiedenen Ladungen eines Conductors, welcher der Influenz äusserer elektrischer Massen ausgesetzt ist, zeichnet sich hinsichtlich des Gesammtpotentiales die Ladung aus, bei welcher diese Function im Inneren des Conductors den Werth 0 annimmt. Es tritt aber diese Ladung, wie man leicht einsehen wird, stets auf, wenn der Conductor durch einen verschwindend dünnen Draht mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt wird und soweit von der Erde entfernt ist, dass die elektrische Wirkung zwischen beiden ausser Acht gelassen werden darf. Jeder Gleichgewichtszustand des Conductors lässt sich auf die soeben erwähnte Ladung und die gewöhnliche Gleichgewichtsvertheilung zurückführen, das heisst: Jede Ladung des Conductors kann angesehen werden als Uebereinan-

derlagerung der Ladung, welche auf dem abgeleiteten Conductor auftritt, und einer Ladung, welche für sich im Gleichgewichte ist, und wenn die Ladung des abgeleiteten Conductors sowie die gewöhnliche Gleichgewichtsvertheilung bekannt ist, so lässt sich sofort die Anordnung einer Ladung angeben, welche eine gegebene Quantität haben, oder welcher ein gegebener Werth des Gesammtpotentiales im Inneren des Conductors entsprechen soll.

Wenn ein isolirter, ursprünglich neutraler oder geladener Conductor, welcher der Wirkung fester elektrischer Massen ausgesetzt ist, durch einen verschwindend dünnen Draht mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt wird, so fliesst nach dem Obigen ein Theil seiner Ladung durch den Draht nach der Erde hin ab, während der übrige Theil durch die festen elektrischen Massen festgehalten wird. Die Elektricität, welche den erstgenannten Theil der Ladung ausmacht, nennt man freie Elektricität, und die Elektricität, welche den zweiten Theil der Ladung ausmacht, nennt man gebundene Elektricität.

Ueber die Beziehung zwischen der Dichtigkeit und Quantität der Ladung, welche auf einem abgeleiteten Conductor durch äussere elektrische Massen inducirt wird, und der Quantität dieser Massen lassen sich einige wichtige allgemeine Regeln aufstellen. Sie werden mit Hülfe des folgenden Theoremes gewonnen:

Wenn V den Werth, welchen das Potential einer beliebigen auf einem Conductor verbreiteten Ladung in dem äusseren Punkte O annimmt, V' aber den Werth auf der Oberfläche des Conductors bedeutet, und wenn ϱ_0 die Dichtigkeit der Ladung ist, welche die in den Punkt O concentrirte Einheit der positiven Elektricität auf dem abgeleiteten Conductor hervorruft, so ist:

$$V = -\int \varrho_0 \, V' \, ds.$$

Wir beweisen diesen Satz mit Hülfe der folgenden früher gefundenen Gleichung (Green'scher Lehrsatz, dritter Zusatz):

$$\int \left(G \varDelta^2 H - H \varDelta^2 G \right) dk = \int \left(G \frac{dH}{dn} - H \frac{dG}{dn} \right) ds.$$

Wir wenden diese Gleichung auf den Raum an, welcher begrenzt wird von der Oberfläche s des Conductors, der Oberfläche einer ersten Hülfskugel σ, deren Centrum O ist, und welche ganz ausserhalb des Conductors liegt, und endlich von einer zweiten Hülfskugel Σ, deren Centrum im Endlichen liegt, und welche den Conductor und die erste Hülfskugel umschliesst. Wir nehmen ferner für G das Potential V des geladenen Conductors und für H den Ausdruck $\frac{1}{r} + U$, in welchem r die Entfernung von O, U das Potential der Ladung bedeutet, welche auf dem Conductor durch die Einheit der positiven Elektricität inducirt wird, wenn letztere in den Punkt O concentrirt ist. Für den angegebenen Raum wird dann stets das in der Gleichung links stehende Integral verschwinden, und das rechts stehende Integral ist über die Elemente der drei erwähnten Hülfsflächen auszudehnen. Nun sieht man aber leicht ein, dass der auf Σ sich beziehende Theil dieses Integrales sich der Grenze Null nähert, wenn man die Dimensionen jener Fläche über alle Grenzen wachsen lässt. Der auf die Kugel σ sich beziehende Theil des Integrales nähert sich mit abnehmendem Radius dem Grenzwerthe $-4\pi V$, wenn V der Potentialwerth im Punkte O ist. Der dritte auf den Conductor sich beziehende Theil des Integrales ist:

$$\int \left\{ V' \frac{d\left(\frac{1}{r} + U\right)}{dn} - \left(\frac{1}{r} + U\right) \frac{dV}{dn} \right\} ds.$$

Nun verschwindet aber in und auf dem Conductor der Werth von $\frac{1}{r} + U$, während $\frac{d\left(\frac{1}{r} + U\right)}{dn}$ mit $-4\pi\varrho_0$ zusammenfällt, so dass also das letzte Integral in den Ausdruck

$$-4\pi \int \varrho_0 V' ds$$

übergeht. Aus obigen Ergebnissen fliesst aber ohne Weiteres der Satz.

Unterstellen wir jetzt, V sei das äussere, V' das innere Potential einer elektrischen Ladung, die so über die Oberfläche eines Conductors vertheilt ist, dass sie für sich im Gleichgewicht ist, und bezeichnen wir durch q_0 die Quantität der Ladung,

welche die im Punkte O befindliche Quantität q auf dem abgeleiteten Conductor inducirt, so ist für den Punkt O, da jetzt V' constant wird:

$$Vq = - V' q_0.$$

Wir entnehmen dieser Gleichung, dass die Quantität der inducirten Ladung der inducirenden Masse entgegengesetzt und an absolutem Werthe kleiner, höchstens gleich ist. Jene Quantität bleibt ungeändert, wenn der inducirende Punkt auf einer Niveaufläche des Potentiales V verschoben wird, und sie durchläuft alle Werthe von $-q$ bis o, wenn die inducirende Masse von einem Punkte auf dem Conductor ausgehend, auf einer Kraftlinie des genannten Potentiales ins Unendliche rückt.

Was die Dichtigkeit der inducirten Ladung betrifft, so ist ihr Vorzeichen allenthalben dem der inducirenden Masse entgegengesetzt, auch verschwindet sie in keinem Punkte. Es genügt, diesen wichtigen Satz für den Fall zu beweisen, wo die inducirende Masse etwa positiv und gleich Eins ist. Die von ihr inducirte Dichtigkeit sei ϱ_0. Alsdann hat man, unter V und V' das äussere und innere Potential einer beliebig vertheilten Ladung von gleichartiger, etwa positiver Dichtigkeit verstanden, für den Punkt O:

$$V = -\int \varrho_0 \, V' ds.$$

Wäre nun an einer Stelle des Conductors ϱ_0 positiv oder Null, so könnte man offenbar dadurch, dass man die Ladung nach jenem Punkte hindrängte, erzielen, dass das Integral einen negativen Werth erlangte, oder dass es sich der Null näherte; zugleich würde aber in dem einen und anderen Falle das Potential V sich einem positiven von Null verschiedenen Werthe nähern. Dieser Widerspruch lässt ersehen, dass ϱ_0 nothwendig kleiner als Null sein muss. Ein abgeleiteter Conductor, welcher der Wirkung äusserer, beliebig vertheilter, aber gleichnamiger elektrischer Massen ausgesetzt wird, bedeckt sich allenthalben mit Elektricität von entgegengesetzter Natur, und die Quantität seiner Ladung ist im Allgemeinen kleiner als die der inducirenden Massen, höchstens ihr gleich. Bezeichnen wir jene durch Q_0, das Element der inducirenden Elektricität durch dQ,

das äussere und innere Potential einer gewöhnlichen Gleichgewichtsladung des Conductors durch V und V', so kommt:

$$Q_0 = -\int \frac{V}{V'} \cdot dQ.$$

Die letzte Gleichung verliert ihre Gültigkeit nicht, wenn die inducirenden Massen aus ungleichnamigen Theilen bestehen. In diesem Falle ist aber die Dichtigkeit der inducirten Ladung im Allgemeinen theils positiv, theils negativ, und über die Quantität der Ladung lässt sich nur soviel aussagen, dass ihre ungleichnamigen Theile an absoluter Grösse kleiner als die ihnen entgegengesetzten Theile der inducirenden Massen sind.

Für einen abgeleiteten sphärischen Conductor ergiebt sich aus dem Obigen, wie auch unmittelbar, folgende Beziehung, wenn R der Radius des Conductors, V_0 der Werth des inducirenden Potentiales im Mittelpunkte ist:

$$Q_0 = -R\,V_0.$$

Diese Beziehung kann als Grundlage für eine Methode, den Werth des Potentiales fester elektrischer Massen in einem gegebenen Punkte durch absolutes Maass zu bestimmen, dienen.

b. Mit geringen Modificationen lassen sich die vorhergehenden Betrachtungen auf den Fall übertragen, wo der Conductor eine Schale ist und den Inducenten ganz einschliesst.

Wird in diesem Falle der Conductor mit der Erde in Verbindung gesetzt, so befindet sich die inducirte Ladung ganz auf der Oberfläche der Höhlung und auf dieser ist sie so vertheilt, dass ihr Potential in Gemeinschaft mit dem Potential des Inducenten auf der gedachten Fläche und in dem ganzen ausserhalb gelegenen Raume verschwindet. Wenn man also feste elektrische Massen in einen Leiter einschliesst und diesen mit der Erde in Verbindung setzt, so findet ausserhalb des Conductors keine elektrische Wirkung statt, ein Satz, der durch die Erfahrung bestätigt wird. In gleicher Weise wie ein geschlossener Conductor würde eine abgeleitete unbegrenzte Scheibe die Wirkung elektrischer Massen auf der von diesen abgekehrten Seite vollständig vernichten.

Bezeichnen wir wieder wie im Vorhergehenden durch ϱ_0 die Dichtigkeit, welche von der elektrischen Masse Eins auf einem Elemente ds der Oberfläche der Höhlung inducirt wird,

wenn sie in einen Punkt O der Höhlung concentrirt ist, ferner durch V und V' das Potential einer auf der Oberfläche der Höhlung irgendwie vertheilten Ladung für den Punkt O und für die Punkte der Oberfläche, so findet man auch hier durch analoge Betrachtungen wie früher:

$$V = -\int \varrho_0\, V' ds.$$

Aus diesem Theoreme folgt, dass sich die Quantität der auf dem abgeleiteten Conductor inducirten Ladung lediglich durch das Vorzeichen von der Quantität der eingeschlossenen Massen unterscheidet, denn, wenn V' auf der Oberfläche der Höhlung constant wird, so wird auch V gleich V'. Zu demselben Resultate, dessen man sich zur Bestimmung der Summe beliebig vertheilter elektrischer Quantitäten bedienen könnte, würde auch für einen sphärischen Conductor die 2. Bemerkung des 3. Zusatzes zum Green'schen Lehrsatze führen. Wofern die inducirenden Massen gleichnamig sind, hat die Dichtigkeit der inducirten Ladung allenthalben das entgegengesetzte Vorzeichen und ist sie an keiner Stelle gleich Null. Es ergiebt sich dieser Satz durch dieselben Schlüsse, wie der analoge Satz der vorhergehenden Nummer. Bei ungleichnamigen Massen ist die Dichtigkeit der inducirten Ladung im Allgemeinen theils positiv, theils negativ. Die ungleichnamigen Theile der Ladung sind an absoluter Grösse kleiner als die ihnen entgegengesetzten Theile der inducirenden Massen.

Wenn der Conductor nicht abgeleitet wird, so besteht seine Ladung unter der Einwirkung des Idioelektricums aus zwei Theilen; der eine Theil befindet sich auf der Oberfläche der Höhlung, und fällt mit der Ladung zusammen, die inducirt würde, wenn man den Conductor mit der Erde in Verbindung setzte. Der zweite Theil ist über die äussere Oberfläche des Conductors verbreitet und so vertheilt, dass er für sich im Gleichgewichte ist. Die Quantität dieses Theiles ist der Quantität der ursprünglichen Ladung um die Quantität des Inducenten vermehrt gleich.

Es ist leicht, Beispiele von solchen Gleichgewichtszuständen, wie sie im Vorhergehenden erörtert wurden, zu bilden. In der That, es sei S eine in sich geschlossene Niveaufläche der Potentialfunction V, und zwar entspreche sie dem Potentialwerthe A.

Von den Massen, welche das Potential erzeugen, liege — was der allgemeine Fall ist — ein Theil Q_1 ausserhalb und ein zweiter Theil Q_2 innerhalb der Fläche S. Wird nun letztere mit Elektricität von der Dichtigkeit $-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{dV}{dN}$ belegt, so erhält man diejenige Ladung eines von der Fläche S begrenzten und von den Massen Q_1 influencirten Conductors, deren Quantität Q_2 ist und bei welcher im Inneren des Conductors das Gesammtpotential den Werth A aufweist. Belegt man aber dieselbe Fläche mit Elektricität von der Dichtigkeit $\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{dV}{dN}$, so ist dies die Ladung, welche auf der Fläche von den eingeschlossenen Massen Q_2 inducirt wird, wenn jene eine Höhlung im Inneren eines abgeleiteten Conductors begrenzt.

Die Bestimmung des elektrischen Gleichgewichtes auf der Oberfläche eines gegebenen Conductors, welcher der Influenz gegebener fester elektrischer Massen ausgesetzt wird, ist im Allgemeinen mit grossen Schwierigkeiten verknüpft. Wir werden uns hier damit begnügen, den einfachsten der Fälle zu betrachten, in welchem die Lösung jenes Problemes gelungen ist, den Fall nämlich, wo die Influenzelektricität auf einer sphärischen Fläche auftritt. Ausserdem werden wir eine allgemeine Methode zur Lösung des Problemes aufstellen und dieselbe auf einen ellipsoidischen Conductor, welcher der Wirkung einer constanten vertheilenden Kraft ausgesetzt ist, anwenden.

2. Influenzelektricität auf einer sphärischen Fläche.

a. Lehrsätze über das Potential der Sphäre.

1. Es werde der Mittelpunkt eines irgendwie mit elektrischer Materie belegten sphärischen Conductors zum Pol, ein Radius zur Axe und eine durch diesen gelegte Diametral-Ebene zur

Fundamental-Ebene eines räumlichen Polarcoordinaten-Systems genommen. Für ein Element ds der Kugel sei φ' der Winkel, welchen der nach dem Elemente gezogene Radius R mit der Axe bildet, sowie θ' der Azimuthalwinkel zwischen der Fundamentalebene und der durch den Strahl und die Axe gelegten Ebene. Ferner sei ϱ, eine Function von θ' und φ', die Dichtigkeit der Ladung. Alsdann hat man für das Potential in einem Punkte, dessen Polarcoordinaten t, φ, θ sind:

$$V = \int \frac{\varrho\, ds}{r} = \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{\pi} d\varphi' \frac{\varrho R^2 \sin\varphi'}{\sqrt{R^2 - 2Rt\cos\delta + t^2}},$$

wo δ den Winkel zwischen dem Leitstrahle des Punktes und dem Leitstrahle eines Elementes der Oberfläche bezeichnet, so dass zu setzen ist:

$$\cos\delta = \cos(\theta - \theta') \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi'.$$

Entwickelt man den Radicanden unter dem Integralzeichen nach steigenden Potenzen von $\frac{R}{t}$ oder $\frac{t}{R}$, jenachdem der Punkt, auf welchen sich das Potential bezieht, ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegt, so kommt:

$$\text{I.}\quad V = P_0 \left(\frac{R}{t}\right) + P_1 \left(\frac{R}{t}\right)^2 + P_2 \left(\frac{R}{t}\right)^3$$
$$+ P_3 \left(\frac{R}{t}\right)^4 + \cdots = \sum_0^{\infty} P_n \left(\frac{R}{t}\right)^{n+1},$$

$$\text{II.}\quad V' = P_0 + P_1 \left(\frac{t}{R}\right) + P_2 \left(\frac{t}{R}\right)^2 + P_3 \left(\frac{t}{R}\right)^3 + \cdots$$
$$= \sum_0^{\infty} P_n \left(\frac{t}{R}\right)^n,$$

und es sind die Coefficienten P_n rationale ganze Functionen der Grössen $\cos\varphi$, $\sin\varphi \cos\theta$ und $\sin\varphi \sin\theta$. Wenn nämlich durch $p_n(\cos\delta)$ der Coefficient des nten Gliedes in der Entwickelung des Ausdruckes $(1 - 2t\cos\delta + t^2)^{-1/2}$ nach steigenden Potenzen von t bezeichnet wird, so hat man:

$$P_n = R \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{\pi} d\varphi'\, \varrho \sin\varphi'\, p_n(\cos\delta),$$

und es ist:

$$p_n(\cos\delta) = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdot(2n-1)}{n!}\Big(\cos\delta^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cos\delta^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}\cos\delta^{n-4}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2\cdot4\cdot6(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cos\delta^{n-6}+\cdots\Big)$$

Die Coefficienten p_n machen eine besondere Art der Coefficienten P_n aus, indem der Ausdruck $(1-2t\cos\delta+t^2)^{-1/2}$ als ein Kugelpotential aufgefasst werden kann, nämlich als das Potential der Masse Eins, solche in den Punkt mit den Winkelcoordinaten φ', θ' auf einer um den Pol mit dem Radius Eins beschriebenen Kugel concentrirt gedacht.

Wenn wir ein rechtwinkliges Punktcoordinatensystem einführen, dessen z-Axe in die Axe der Polarcoordinaten und dessen x-Axe in die Fundamentalebene fällt, so ist:

$$x = t\sin\varphi\cos\theta,\quad y = t\sin\varphi\sin\theta,\quad z = t\cos\varphi,$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\Delta^2 V = \frac{d^2V}{dt^2}+\frac{2}{t}\cdot\frac{dV}{dt}+\frac{1}{t^2}\cdot\frac{d^2V}{d\varphi^2}+\frac{cotg\,\varphi}{t^2}\cdot\frac{dV}{d\varphi}+\frac{1}{t^2\sin\varphi^2}\cdot\frac{d^2V}{d\theta^2}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber für jeden ausserhalb und innerhalb der Kugel befindlichen Punkt; man hat daher auch für solche Punkte, wie die Substitution von V und V' und die Annullirung der Coefficienten ergiebt, mit welchen die Potenzen von t behaftet erscheinen:

$$D\cdots\cdot\ \frac{d\left\{(1-\mu^2)\dfrac{dP_n}{d\mu}\right\}}{d\mu}+\frac{\dfrac{d^2P_n}{d\theta^2}}{1-\mu^2}+n(n+1)P_n=0,$$

wo zur Abkürzung $\cos\varphi = \mu$ gesetzt ist.

Die Coefficienten P_n gehören zu der Classe der sogenannten Kugelfunctionen. Ihre allgemeine Form ist folgende:

$$P_n = \sum_{i=o}^{i=n}\frac{d^i p_n(\mu)}{d\mu^i}\sin\varphi^i\,(A_{n,i}\sin i\theta + B_{n,i}\cos i\theta),$$

wo $A_{n,i}$, $B_{n,i}$ constante, d. h. von den Coordinaten unabhängige, Coefficienten bedeuten und μ für $\cos\varphi$ gesetzt ist.

Es mögen hier noch zwei bemerkenswerthe Theoreme über die Coefficienten P_n Platz finden, damit der Leser in den Stand

gesetzt werde, die allgemeinen Entwickelungen des folgenden Abschnittes für den Fall der Kugelfläche zu verificiren.

Erstes Theorem. So oft die Indices der Functionen $P_{n'}$, $P_{n''}$ von einander verschieden sind, hat man:

$$\int P_{n'} P_{n''} \, ds = 0,$$

wenn die Integration über die ganze Oberfläche der Kugel ausgedehnt wird.

Der Differentialgleichung D zufolge ist nämlich:

$$n'(n'+1)\int P_{n'} P_{n''} ds = n'(n'+1)\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi\, R^2 \sin\varphi\, P_{n'} P_{n''}$$

$$= n'(n'+1) R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{+1} d\mu\, P_{n'} P_{n''}$$

$$= -R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{+1} d\mu\, P_{n''} \left[\frac{d\left\{(1-\mu^2)\frac{dP_{n'}}{d\mu}\right\}}{d\mu} + \frac{\frac{d^2 P_{n'}}{d\theta^2}}{1-\mu^2} \right].$$

Integrirt man jetzt rechter Hand durch Theile, und zwar beim ersten Gliede nach μ, beim zweiten Gliede nach θ, und berücksichtigt man die Stetigkeit der Functionen P_n, so kommt:

$$n'(n'+1)\int P_{n'} P_{n''} ds = R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{+1} d\mu \left[(1-\mu^2)\frac{dP_{n'}}{d\mu}\frac{dP_{n''}}{d\mu} + \frac{\frac{dP_{n'}}{d\theta}\frac{dP_{n''}}{d\theta}}{1-\mu^2} \right].$$

Hiernach ist aber offenbar:

$$\{n'(n'+1) - n''(n''+1)\} \int P_{n'} P_{n''} \, ds = 0,$$

woraus die Richtigkeit des Satzes erhellt.

Zweites Theorem. Bezeichnen wir durch δ den Winkel, welchen der Leitstrahl φ', θ' eines Elementes der Kugelfläche mit einem festen Leitstrahl φ, θ bildet, so ist:

$$\int p_n(\cos\delta)\, P_n(\varphi', \theta')\, ds = \frac{4\pi R^2}{2n+1} P_n(\varphi, \theta),$$

wenn das Integral sich über die ganze Kugelfläche erstreckt.

Um uns von der Richtigkeit dieses Theoremes zu überzeugen, wenden wir den Green'schen Lehrsatz (dritter Zusatz) auf die Function:

$$P_n(\varphi, \theta) \left(\frac{t}{R}\right)^n = F$$

an, indem wir zugleich für die Fläche s die Kugelfläche nehmen. Wir finden, da $\Delta^2 F$ verschwindet, für jeden Punkt im Inneren der Kugel:

$$4\pi F = \int \frac{\frac{dF}{dt}}{r} ds - \int F \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} ds.$$

Nun hat man aber allgemein für den reciproken Werth der Entfernung r zweier Punkte t, φ, θ und t', φ', θ', deren Leitstrahlen den Winkel δ einschliessen, je nachdem $t \geqq t'$ oder $t \leqq t'$ ist:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{t}\sum_0^\infty p_n(\cos\delta)\left(\frac{t'}{t}\right)^n \text{ oder } \frac{1}{r} = \frac{1}{t'}\sum_0^\infty p_n(\cos\delta)\left(\frac{t}{t'}\right)^n.$$

Hiernach erlangen die Ausdrücke $\frac{1}{r}$ und $\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}$ für die Punkte der Kugelfläche die Werthe:

$$\frac{1}{R}\sum_0^\infty p_n(\cos\delta)\left(\frac{t}{R}\right)^n \text{ und } -\frac{1}{R^2}\sum_0^\infty (n+1) p_n(\cos\delta)\left(\frac{t}{R}\right)^n,$$

wo t die Länge des nach dem Centrum der r gezogenen Leitstrahles, δ aber den Winkel zwischen diesem und dem Radius des betreffenden Punktes der Kugel bedeutet. Es erlangen ferner F und $\frac{dF}{dt}$ für einen Punkt der Kugelfläche die Werthe:

$$P_n(\varphi', \theta') \text{ und } \frac{n P_n(\varphi', \theta')}{R},$$

wenn φ', θ' die Winkelcoordinaten des Punktes sind.

Durch Substitution der letzten vier Ausdrücke in die Gleichung mit F findet man, wenn noch der Uebersichtlichkeit wegen für den Index der auftretenden Summen der Buchstabe ν gesetzt wird:

$$4\pi R^2 P_n(\varphi, \theta)\left(\frac{t}{R}\right)^n = \int P_n(\varphi', \theta') \left\{ n \sum_0^\infty p_\nu(\cos\delta)\left(\frac{t}{R}\right)^\nu + \sum_0^\infty (\nu+1) p_\nu(\cos\delta)\left(\frac{t}{R}\right)^\nu \right\} ds.$$

Das rechter Hand auftretende Integral zieht sich aber dem vorhergehenden Theoreme zufolge auf:

$$(2n+1)\left(\frac{t}{R}\right)^n \int p_n(\cos\delta)\, P_n(\varphi' \cdot \theta')\, ds$$

zurück, woraus dann die Richtigkeit des Satzes erhellt.

Als Zusatz zu dem letzten Theoreme ergiebt sich die Beziehung:

$$\int p_n^2\, ds = \frac{4\pi R^2}{2n+1},$$

indem p_n (1) für jeden Index der Einheit gleich wird.

2. Da bei der Kugel die Differentiation nach der auswärts gerichteten Normale mit einer Differentiation nach t zusammen fällt, so hat man: $4\pi\varrho = -\left(\frac{dV}{dt} - \frac{dV'}{dt}\right)$. Nun ist aber für die Punkte der Oberfläche, d. i. für $t = R$:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{R}\left\{P_0 + 2P_1 + 3P_2 + \cdots\right\} = -\frac{1}{R}\left\{V + (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \cdots)\right\}$$

$$\frac{dV'}{dt} = \frac{1}{R}\left\{P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \cdots\right\} = -\frac{1}{R}\left\{V' - (P_0 + 2P_1 + 3P_2 +) \cdots\right\},$$

wo rechter Hand V oder V' das Potential auf der Oberfläche bedeutet, d. h. die Reihe:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \cdots\cdots$$

Hiernach ergiebt sich:

$$4\pi\varrho = \frac{1}{R}\left\{P_0 + 3P_1 + 5P_2 + \cdots\right\} = \left(\frac{V}{R} + 2\frac{dV'}{dt}\right) = -\left(\frac{V'}{R} + 2\frac{dV}{dt}\right).$$

Die beiden letzten Ausdrücke führen zu einer bemerkenswerthen Form des äusseren und inneren Kugelpotentiales. Der erste jener Ausdrücke liefert nämlich:

$$V = \int \frac{\varrho\, ds}{r} = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{V}{R} + 2\frac{dV'}{dt}\right) \frac{ds}{r}.$$

Es ist aber nach dem Green'schen Lehrsatz (dritter Zusatz) für jeden Punkt ausserhalb der Kugelfläche, da im Inneren derselben $\Delta^2 V$ verschwindet:

$$\int \frac{\frac{dV'}{dt}}{r}\, ds = \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}\, ds.$$

Ferner erlangt der Ausdruck $\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}$ auf der Oberfläche fol-

genden Werth, wenn der nach dem Centrum der r gezogene Leitstrahl durch t bezeichnet wird:

$$\frac{t^2 - R^2}{2 R r^3} - \frac{1}{2 R r}.$$

Hiernach kommt für das äussere Potential:

$$\text{I.} \quad V = \frac{t^2 - R^2}{4 \pi R} \int \frac{V}{r^3}\, ds.$$

Für das innere Potential findet man, indem man den zweiten Ausdruck für $4 \pi \varrho$ benutzt:

$$\text{II.} \quad V' = \frac{R^2 - t^2}{4 \pi R} \int \frac{V'}{r^3}\, ds.$$

Wir wollen die beiden letzten Formeln auf einen interessanten Fall des elektrischen Gleichgewichtes anwenden. Eine isolirte Kugelschale aus einer leitenden Substanz, welche an einer Stelle durchbohrt ist, werde mit einem beliebigen Quantum Elektricität geladen. Die Dicke der Schale sei im Vergleich mit dem Radius sowie auch mit den Dimensionen der Oeffnung sehr klein. Bekanntlich lässt sich alsdann durch den Versuch nachweisen, dass die Dichtigkeit der Elektricität auf der inneren Oberfläche des Conductors in grösserer Entfernung von der Oeffnung nur einen sehr kleinen Bruchtheil der Dichtigkeit an der äusseren Oberfläche ausmacht, wofern auch die Oberfläche des ausgeschnittenen Theiles im Vergleich mit der ganzen Oberfläche klein ist. Diese Thatsache lässt sich wie folgt erklären.

Indem man die Dicke des Conductors annähernd als verschwindend klein annimmt, kann man das Potential der Ladung ausserhalb der leitenden Masse als ein Kugelpotential betrachten. Wenn wir daher den Potentialwerth im Inneren der leitenden Substanz durch A bezeichnen, so erhalten wir aus den Formeln I. und II., wie leicht zu finden:

$$V = \frac{AR}{t} - \frac{t^2 - R^2}{4 \pi R} \int \frac{A - V}{r^3}\, d\sigma, \quad V' = A - \frac{R^2 - t^2}{4 \pi R} \int \frac{A - V}{r^3}\, d\sigma,$$

wo die Integration sich über die in der Oeffnung gelegenen Elemente der Kugel erstreckt. Es sei nun ϱ_a die Dichtigkeit der Elektricität auf der convexen, ϱ_i die auf der concaven Fläche der Schale und ϱ die Dichtigkeit, welche einer gleich-

förmigen über die ganze Kugel ausgebreiteten Ladung mit dem inneren Potentiale A entspricht. Alsdann kommt, wenn noch

$$\frac{1}{8\pi^2}\int\frac{A-V}{r^3}\,d\sigma=\varDelta\varrho$$

gesetzt wird:

$$\varrho_a=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{dV}{dt}=\varrho+\varDelta\varrho,\quad \varrho_i=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{dV'}{dt}=\varDelta\varrho.$$

Der Werth von $A-V$ hat innerhalb der Grenzen des Integrales, oder, was dasselbe ist, in den Punkten der Oeffnung dasselbe Vorzeichen wie A und verschwindet am Rande der Oeffnung. Es folgt hieraus, dass $\varDelta\varrho$ dasselbe Vorzeichen wie ϱ hat; übrigens wächst $\varDelta\varrho$ schliesslich ins Unendliche, wenn man sich auf dem Conductor dem Rande der Oeffnung nähert. Bei einer kreisförmigen Oeffnung wächst der Werth der Differenz $A-V$, wenn man von dem Rande der Oeffnung auf der Kugel nach der Mitte hin fortschreitet, von Null ausgehend bis zu einem Werthe, der kleiner als $A\ sin\ \frac{\varphi}{2}$ ist, unter φ den scheinbaren Halbmesser der Oeffnung für das Centrum der Kugel verstanden; solches ergiebt sich, wenn man das Potential des Theiles ϱ der Ladung ermittelt. Es erreicht also $\varDelta\varrho$ auf einem Elemente der Kugelschale, dessen kürzeste Entfernung von der Oeffnung gleich r ist, nicht den Werth:

$$2\ sin^3\frac{\varphi}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\varrho.$$

Hieraus erhellt aber der Zusammenhang der erwähnten Thatsache mit den Principien der Elektrostatik. Beispiels halber möge erwähnt werden, dass dem Obigen zufolge bei einer Oeffnung von 15^0 Halbmesser der Quotient $\varDelta\varrho:\varrho$ in den Punkten, welche um 45^0, 90^0, 180^0 von der Mitte der Oeffnung entfernt sind, bezüglich kleiner als 0,0641, 0,0050, 0,0012 wird.

Vorgreifend bemerken wir, dass $2\varDelta\varrho$ die Dichtigkeit derjenigen Ladung ist, welche auf der verschwindend dünnen Kugelschale inducirt würde, wenn jene abgeleitet und der ausgeschnittene Theil gleichförmig mit Elektricität von der Dichtigkeit $-\varrho$ belegt würde.

3. Eine besondere Beachtung verdient eine solche Anordnung der Elektricität, wobei die Dichtigkeit nur eine Function

der Polardistanz ist. Es lässt sich dann die Integration nach θ' ausführen und man kann in dem Ausdrucke für $\cos\delta$ $\theta = 0$ setzen; man findet so:

$$V = p_0 P_0' \left(\frac{R}{t}\right) + p_1 P_1' \left(\frac{R}{t}\right)^2 + p_2 P_2' \left(\frac{R}{t}\right)^3 + \cdots\cdots$$

$$V' = p_0 P_0' + p_1 P_1' \left(\frac{t}{R}\right) + p_2 P_2' \left(\frac{t}{R}\right)^2 + \cdots\cdots$$

und es bedeuten P_0', P_1', P_2' etc. die Ausdrücke, welche aus P_0, P_1 etc. hervorgehen, wenn man an die Stelle von δ die Grösse φ' treten lässt, während p_0, p_1 etc. die Coefficienten der nach steigenden Potenzen von t geordneten Entwickelung des Bruches $(1 - 2t \cos.\varphi + t^2)^{-1/2}$ bedeuten, so dass:

$$p_0 = 1,\quad p_1 = \cos\varphi,\quad p_2 = {}^1/_2\,(3\cos\varphi^2 - 1),$$
$$p_3 = {}^1/_2\,(5\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi),\quad p_4 = {}^1/_8\,(35\cos\varphi^4 - 30\cos\varphi^2 + 3),$$
$$p_5 = {}^1/_8\,(63\cos\varphi^5 - 70\cos\varphi^3 + 15\cos\varphi) \text{ etc.}$$

Aus obigen Entwickelungen findet man für die Punkte der Axe, d. i. für $\varphi = 0$:

$$V = P_0' \left(\frac{R}{t}\right) + P_1' \left(\frac{R}{t}\right)^2 + P_2' \left(\frac{R}{t}\right)^3 + \cdots\cdots\cdots$$

$$V' = P_0' + P_1' \left(\frac{t}{R}\right) + P_2 \left(\frac{t}{R}\right)^2 + \cdots\cdots\cdots$$

Hiernach kann das allgemeine Potential leicht aus der Entwickelung für das Potential der auf der Axe gelegenen Punkte gefunden werden. Man braucht nämlich nur die Coefficienten in der Entwickelung des letzteren bezüglich mit p_0, p_1 etc. zu multipliciren.

4) Das Potential elektrischer Massen, welche ganz ausserhalb oder ganz innerhalb einer gegebenen Kugelfläche liegen, muss sich auch für den beziehungsweise innerhalb oder ausserhalb der Kugel befindlichen Raum in gleicher Weise wie das Potential einer elektrischen Ladung, welche über die Kugelfläche ausgebreitet ist, entwickeln lassen. Es ergeben sich aber die betreffenden Entwickelungen wie folgt.

Es sei erstlich V das Potential elektrischer Massen, welche ausserhalb der Sphäre liegen. Das Element der Massen sei dq und seine Coordinaten in Bezug auf ein Polarcoordinatensystem, dessen Pol in den Mittelpunkt der Sphäre fällt, seien t', φ', θ'.

Man hat alsdann für einen Punkt t, φ, θ im Inneren der Kugelfläche, wenn wir, unter δ den Winkel zwischen den Leitstrahlen t und t' verstanden, Kürze halber p_n für $p_n(\cos\delta)$ setzen:

$$V = \int \frac{dq}{r} = \int \frac{dq}{t'} \sum_0^\infty p_n \left(\frac{t}{t'}\right)^n,$$

und hieraus folgt:

$$\text{I. } V = \sum_0^\infty P_n \left(\frac{t}{R}\right)^n,$$

wo zu setzen ist:

$$P_n = \frac{1}{R} \int p_n \left(\frac{R}{t'}\right)^{n+1} dq.$$

Die Coefficienten P_n sind rationale ganze Functionen der Grössen $\cos\varphi$, $\sin\varphi \sin\theta$, $\sin\varphi \cos\theta$ und genügen der Differentialgleichung D.

Wenn zweitens die elektrischen Massen von der Kugelfläche eingeschlossen werden, so hat man für das Potential in einem äusseren Punkte:

$$V = \int \frac{dq}{r} = \int \frac{dq}{t} \sum_0^\infty p_n \left(\frac{t'}{t}\right)^n.$$

Es ergiebt sich hieraus:

$$\text{II. } V = \sum_0^\infty P_n \left(\frac{R}{t}\right)^{n+1},$$

wenn man setzt:

$$P_n = \frac{1}{R} \int p_n \left(\frac{t'}{R}\right)^n dq,$$

und über die Coefficienten dieser Entwickelung lässt sich dasselbe aussagen, was hinsichtlich der Coefficienten in der Entwickelung I. bemerkt wurde. Beide Entwickelungen aber sind im Allgemeinen convergent, wie leicht durch Betrachtung des Potentiales einer punktförmigen Masse gefunden werden kann, und dies gilt auch wenn die elektrischen Massen auf die Kugelfläche zu liegen kommen, da man es dann mit den früher betrachteten specielleren Entwickelungen zu thun hat. Die Form der oben gewonnenen Entwickelungen ergiebt sich auch sofort aus den Gleichungen:

$$V = \int \frac{\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dt}}{r} ds - \int \frac{V}{4\pi} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} ds,$$

$$V = -\int \frac{\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{dV}{dt}}{r}\, ds + \int \frac{V}{4\pi}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}\, ds,$$

von welchen die erste für den ersten, die zweite für den zweiten der betrachteten Fälle gilt. Man braucht zu dem Ende nur die Ausdrücke $\frac{1}{r}$ und $\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}$ in der ersten Gleichung nach steigenden, in der zweiten Gleichung nach fallenden Potenzen des nach dem Centrum der r gezogenen Leitstrahles zu entwickeln.

b. Bestimmung der auf einer Kugelfläche durch feste elektrische Massen inducirten Ladung.

Mit Hülfe der vorhergehenden Theoreme über das Kugelpotential lässt sich ohne Schwierigkeit die elektrische Ladung finden, welche auf der sphärischen Oberfläche eines Conductors durch äussere feste elektrische Massen oder auf der Oberfläche einer sphärischen Höhlung durch eingeschlossene Massen inducirt wird. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des Falles, wo der Conductor abgeleitet ist, weil der entgegengesetzte Fall stets leicht auf jenen zurückgeführt werden kann.

Es sei nun erstlich V das Potential elektrischer Massen, welche ausserhalb eines abgeleiteten Conductors mit sphärischer Oberfläche liegen. Nach dem Vorhergehenden können wir alsdann bei Zugrundelegung eines Polarcoordinatensystemes, dessen Pol im Centrum des Conductors liegt, und wenn wir die früheren Bezeichnungen beibehalten, folgende Form für das Potential im Inneren des Conductors erzielen:

$$V = \sum_0^\infty P_n \left(\frac{t}{R}\right)^n.$$

Bezeichnen wir das äussere und innere Potential der Ladung, welche von den elektrischen Massen auf der Oberfläche des Conductors inducirt wird, durch U und U', so haben wir für die auf der Oberfläche und im Inneren des Conductors gelegenen Punkte:

$$V + U' = 0,$$

woraus folgt:

$$U' = -\sum_0^\infty P_n \left(\frac{t}{R}\right)^n.$$

Im Hinblick auf die Beziehung zwischen dem inneren und äusseren Kugelpotentiale finden wir ferner:

$$U = -\sum_0^\infty P_n \left(\frac{R}{t}\right)^{n+1}.$$

Die Dichtigkeit ϱ der inducirten Ladung bestimmt sich durch die Gleichung:

$$4\pi\varrho = -\frac{1}{R}\sum_0^\infty (2n+1)\, P_n.$$

Wenn zweitens die inducirenden Massen in einer sphärischen Höhlung eines abgeleiteten Conductors eingeschlossen sind, so lässt sich ihr Potential für den ausserhalb der Höhlung liegenden Raum auf die Form:

$$V = \sum_0^\infty P_n \left(\frac{R}{t}\right)^{n+1}$$

bringen. Man findet dann durch eine ähnliche Schlussweise wie im vorhergehenden Falle für das Potential der inducirten Ladung:

$$U = -\sum_0^\infty P_n \left(\frac{R}{t}\right)^{n+1}, \quad U' = -\sum_0^\infty P_n \left(\frac{t}{R}\right)^n,$$

und zur Bestimmung der Dichtigkeit hat man wiederum:

$$4\pi\varrho = -\frac{1}{R}\sum_0^\infty (2n+1)\, P_n.$$

Einfache und bemerkenswerthe Gesetze ergeben sich für die elektrische Ladung, welche von einer punktförmigen elektrischen Masse auf einer abgeleiteten Kugelfläche inducirt wird. Die Masse heisse Q und liege ausserhalb der Kugel in einem Punkte P, dessen Entfernung vom Mittelpunkte T sei. Der nach P hin gehende Leitstrahl werde der Einfachheit wegen zur Axe des Coordinaten-Systemes genommen, da dann offenbar die Coordinate θ nicht mehr auftreten wird. Für das Potential der inducirenden Masse hat man, wenn noch Kürze halber p_n statt $p_n(\cos\varphi)$ gesetzt wird:

$$V = \frac{Q}{r} = \frac{Q}{T}\sum_0^\infty p_n \left(\frac{t}{T}\right)^n = \frac{Q}{T}\sum_0^\infty p_n \left(\frac{R}{T}\right)^n \left(\frac{t}{R}\right)^n.$$

Hieraus ergiebt sich für die inducirte Ladung:

$$U' = -\frac{Q}{T}\sum_0^\infty p_n \left(\frac{R}{T}\right)^n \left(\frac{t}{R}\right)^n, \quad U = -\frac{Q}{T}\sum_0^\infty p_n \left(\frac{R}{T}\right)^n \left(\frac{R}{t}\right)^{n+1}.$$

Bestimmen wir die Grösse T' so, dass

$$TT' = R^2$$

wird, so kann man für die letzte Gleichung schreiben:

$$U = -\frac{QT'}{R}\cdot\frac{1}{t}\sum_0^\infty p_n \left(\frac{T'}{t}\right)^n.$$

Es ist aber der Ausdruck

$$\frac{1}{t}\sum_0^\infty p_n \left(\frac{T'}{t}\right)^n$$

nichts anderes als die Entwickelung des reciproken Werthes der Entfernung von einem Punkt P' auf dem nach P hingehenden Leitstrahle, der in der Entfernung T' vom Mittelpunkte und auf derselben Seite wie P liegt, der folglich innerhalb der Kugel, und zwar so liegt, dass er von dem Punkte P durch die Kugelfläche harmonisch getrennt wird. Bedeutet also r' die Entfernung von dem gedachten Punkte P', so ist:

$$U = -\frac{QR}{T}\cdot\frac{1}{r'}.$$

Wie uns diese Gleichung zeigt, wirkt die von der Masse Q inducirte Ladung nach aussen hin genau so, wie die Masse $-\frac{QR}{T}$, solche in den Punkt P' concentrirt gedacht. Den Punkt P' mit seiner Masse nennt man nach Thomson das elektrische Bild des Punktes P mit seiner Masse.

Für die Dichtigkeit der inducirten Ladung findet man:

$$\varrho = -\frac{Q}{4\pi R}\cdot\frac{T^2 - R^2}{r^3},$$

und die Quantität der ganzen Ladung ist in Uebereinstimmung mit einem früheren Satze und wie leicht von vornherein sich ergiebt, gleich dem negativen Producte aus dem Radius der Kugel und dem im Mittelpunkte der Kugel auftretenden Potentialwerth.

Durch eine Analyse, welche der oben ausgeführten ähnlich

ist, ergeben sich die Gesetze für die Ladung, welche auf der sphärischen Oberfläche einer Höhlung in einem abgeleiteten Conductor von einem innerhalb der Kugelfläche, welche die Höhlung bildet, gelegenen Punkte P mit der Masse Q inducirt wird. Nach aussen hin wirkt die Ladung für sich wie die in den Punkt P concentrirte Masse $-Q$. Für den inneren Raum aber ist das Potential der Ladung dasselbe wie das der Masse $-\frac{QR}{T}$, solche in einen Punkt P', den Bildpunkt des Punktes P, concentrirt gedacht, welcher mit letzterem auf demselben Radius liegt und von ihm durch die Kugelfläche harmonisch getrennt wird. Für die Dichtigkeit der inducirten Ladung findet man:

$$\varrho = -\frac{Q}{4\pi R} \cdot \frac{R^2 - T^2}{r^3},$$

und die Quantität der Ladung ist in Uebereinstimmung mit einem früheren Satze der inducirenden Masse entgegengesetzt gleich.

Litteratur: Laplace, Mécanique céleste. Tome II.

3. Allgemeine Entwickelung der auf einer beliebigen Fläche durch feste elektrische Massen inducirten Ladung. Anwendung auf ein Ellipsoïd, welches der Wirkung einer vertheilenden Kraft ausgesetzt ist.

Das Potential elektrischer Massen, welche ganz ausserhalb oder ganz innerhalb einer gegebenen Fläche von beliebiger Gestalt liegen, kann beziehungsweise für den inneren oder äusseren Raum der Fläche mittelst des Green'schen Lehrsatzes (dritter Zusatz) auf dieselbe Form wie das Potential einer elektrischen Ladung der Fläche gebracht werden. Aus dieser bemerkenswerthen Form lässt sich aber ein allgemeines Verfahren

zur Bestimmung der Influenzelektricität, welche auf einem beliebigen Conductor durch feste elektrische Massen hervorgerufen wird, ableiten.

Wir betrachten erstlich den Fall, wo die elektrischen Massen, deren Potential durch V bezeichnet werde, ausserhalb der Fläche, welche s genannt werde, liegen. Für den von der Fläche umschlossenen Raum haben wir nach dem angezogenen Satze:

$$V = \int \frac{\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dn}}{r} ds - \int \frac{V}{4\pi} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds.$$

Das letzte Glied dieser Gleichung ist, wie aus letzterer selbst erhellt, eine Potentialfunction, deren Massen ausserhalb und auf der Fläche liegen, so dass der Ausdruck Δ^2 für dieselbe im Inneren der Fläche verschwindet. Auf die Function können wir daher den Satz wiederum anwenden, desgleichen auf das jetzt auftretende letzte Glied u. s. f. Wenn wir dann endlich der Reihe nach die für die letzten Glieder gewonnenen Ausdrücke substituiren, erhalten wir die gewünschte Form des Potentiales. Zur bequemeren Darstellung dieser Form führen wir noch die Kugelfläche ein, welche sich um das Centrum der r, um den Punkt, auf welchen sich das Potential V bezieht, mit dem Radius Eins beschreiben lässt. Auf diese Kugelfläche projiciren wir die Elemente der Fläche und bezeichnen die Projection des Elementes ds durch $d\sigma$. Ferner setzen wir:

$$\int \frac{V}{4\pi} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds = -\int \frac{V}{4\pi} d\sigma = -V',$$

$$\int \frac{V'}{4\pi} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds = -\int \frac{V'}{4\pi} d\sigma = -V'',$$

u. s. w.

Hiernach kommt endlich, wenn noch der Gleichförmigkeit wegen V^0 für V geschrieben wird:

$$\text{I.} \quad V = C + \int \frac{\frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty \frac{dV^{(\nu)}}{dn}}{r} ds,$$

wo gesetzt ist:

$$lim.\ V^{(\nu)} = C,$$

$$\frac{dV}{dn} + \frac{dV'}{dn} + \frac{dV''}{dn} + \cdots \text{ in infin.} = \sum_0^\infty \frac{dV^{(\nu)}}{dn}.$$

Die durch C bezeichnete Grenze ist offenbar eine Constante, denn die Function V' verläuft innerhalb der Fläche s gleichförmiger als V, ebenso verläuft V'' gleichförmiger als V' u. s. f., so dass sich also die Functionen $V^{(\nu)}$ mit wachsendem Index einer constanten Grenze nähern.

Das neben der Constante C in dem Ausdruck für V auftretende Integral fällt mit dem inneren Potential der Fläche, solche mit Elektricität von der Dichtigkeit

$$\frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty \frac{dV^{(\nu)}}{dn}$$

belegt gedacht, zusammen. Aus dieser Bemerkung folgt ohne Weiteres, dass auf einem Conductor, welcher von der Fläche s begrenzt und der Wirkung des Potentials V ausgesetzt wird, die Ladung mit der Dichtigkeit

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty \frac{dV^{(\nu)}}{dn}$$

im Gleichgewichte ist. Was den besonderen Charakter dieser Ladung betrifft, so bemerke man, dass ihre Quantität gleich Null ist, denn man hat für jeden Index ν:

$$\int \frac{dV^{(\nu)}}{dn}\, ds = 0.$$

Die gefundene particuläre Ladung ist folglich diejenige, welche von den elektrischen Massen inducirt wird, wenn der Conductor isolirt und ursprünglich nicht geladen ist. Hieraus ergiebt sich auch noch eine Bedeutung der Constante C. Letztere ist nämlich offenbar gleich dem Werthe, welchen das Potential der gesammten Elektricität in dem Conductor unter den angegebenen Umständen annimmt, und deshalb ist sie auch entgegengesetzt gleich dem inneren Potentiale, welches auftritt, wenn die durch das Potential V auf dem abgeleiteten Conductor inducirte Ladung so angeordnet wird, dass sie für sich im Gleichgewicht ist.

Für den ausserhalb des Conductors gelegenen Raum hat man:

$$\int \frac{\frac{d V^{(\nu)}}{dn}}{r} ds = \int V^{(\nu)} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds.$$

Wenn man also setzt:

$$\int \frac{V^{(\nu)}}{4\pi} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds = \int \frac{V^{(\nu)}}{4\pi} d\sigma = V^{[\nu]},$$

wo $d\sigma$ die Projection von ds auf eine um das Centrum der r mit dem Radius Eins beschriebene Kugelfläche bedeutet, solche Projection positiv oder negativ genommen, je nachdem der betreffende Radius vector an der Stelle von ds in den inneren Raum des Conductors eindringt oder aus demselben heraustritt, so erhält man für das äussere Potential der oben gefundenen partikulären Ladung:

$$\int \frac{-\frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty \frac{d V^{(\nu)}}{dn}}{r} ds = - \sum_0^\infty V^{[\nu]}.$$

Die Functionen $V^{[\nu]}$ nähern sich mit wachsendem Index für jeden Punkt des äusseren Raumes der Grenze 0, wie solches aus der über die Functionen $V^{(\nu)}$ gemachten Bemerkung folgt.

Wenn zweitens die elektrischen Massen, welche das Potential V erzeugen, innerhalb der Fläche s liegen, so hat man für jeden Punkt ausserhalb der Fläche:

$$V = \int \frac{-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dn}}{r} ds + \int \frac{V}{4\pi} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds,$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich auf demselben Wege, welcher im vorhergehenden Falle eingeschlagen wurde, für V ein Ausdruck von derselben Form wie das Potential einer Ladung der Fläche. Man setze:

$$\int \frac{V}{4\pi} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds = \int \frac{V}{4\pi} d\sigma = V_1,$$

$$\int \frac{V_1}{4\pi} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds = \int \frac{V_1}{4\pi} d\sigma = V_2,$$

u. s. w.,

wo $d\sigma$ die mit dem gehörigen Vorzeichen genommene Projection von ds auf eine mit dem Radius Eins um das Centrum der r beschriebene Kugel bedeutet. Alsdann hat man, da die Functionen $V_1, V_2 \ldots$ mit wachsendem Index für jeden ausserhalb der Fläche gelegenen Punkt sich der Grenze 0 nähern, wenn noch der Gleichförmigkeit wegen V_0 für V gesetzt wird:

$$\text{II.}\quad V = \int - \frac{\frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty \frac{dV_{(\nu)}}{dn}}{r}\, ds.$$

Aus dieser Form des Potentiales ergiebt sich sofort die Ladung, welche von den elektrischen Massen auf der Fläche s inducirt wird, wenn letztere eine Höhlung in einem abgeleiteten Conductor begrenzt. Die Dichtigkeit dieser Ladung ist:

$$\varrho = \frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty \frac{dV_{(\nu)}}{dn}.$$

Für die Punkte der Höhlung hat man ferner:

$$\int \frac{\frac{dV_{(\nu)}}{dn}}{r}\, ds = \int V_{(\nu)}\, \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, ds.$$

Setzt man also:

$$\int \frac{V_{(\nu)}}{4\pi} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, ds = -\int \frac{V_{(\nu)}}{4\pi}\, d\sigma = -V_{[\nu]},$$

unter $d\sigma$ die Projection von ds auf eine mit dem Radius Eins um das Centrum der r beschriebene Kugel verstanden, so erhält man für das innere Potential der gefundenen inducirten Ladung:

$$\int \frac{\frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty \frac{dV_{(\nu)}}{dn}}{r}\, ds = -\sum_0^\infty V_{[\nu]}.$$

Die Functionen $V_{[\nu]}$ nähern sich wie die Functionen $V_{(\nu)}$ mit wachsendem Index der Grenze 0.

Aus den im Obigen gewonnenen Formeln I. und II. ergiebt sich, wie wir sahen, unmittelbar die Ladung, welche auf einem isolirten, ursprünglich nicht geladenen Conductor durch äussere elektrische Massen inducirt wird, sowie die Ladung, welche auf der inneren Oberfläche eines hohlen und abgeleiteten Con-

ductors durch eingeschlossene elektrische Massen hervorgerufen wird. Ausser der Kenntniss dieser beiden Ladungen ist nach früher gemachten Bemerkungen noch die der Ladung erforderlich, welche für sich auf einer gegebenen Fläche im Gleichgewicht ist, wenn man im Stande sein soll, die Influenzelektricität zu bestimmen, die auf einem beliebig gestalteten, geladenen oder nicht geladenen, isolirten oder abgeleiteten Conductor durch gegebene äussere oder eingeschlossene elektrische Massen hervorgerufen wird. Es kann aber aus der Formel I. leicht eine Entwickelung für jene Ladung gefunden werden. Man bezeichne nämlich durch ϱ die Dichtigkeit, durch V das Potential einer nach einem willkürlich angenommenen Gesetze über die gegebene Fläche s ausgebreiteten Ladung; alsdann stellt, wie sich aus der angezogenen Formel ergiebt,

$$\varrho = \frac{1}{4\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{d\,V^{(\nu)}}{dn}$$

die Dichtigkeit derjenigen für sich im Gleichgewichte befindlichen Ladung dar, deren Quantität gleich $\int\varrho\cdot ds$ ist, und welche im Inneren der Fläche das hier allenthalben gleiche Potential

$$V = \int\frac{\frac{1}{4\pi}\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{d\,V^{(\nu)}}{dn}}{r}\,ds$$

erzeugt. Das äussere Potential dieser Ladung ist:

$$V = \sum_{0}^{\infty} V^{[\nu]}.$$

Indem wir es dem Leser überlassen, die vorhergehenden allgemeinen Entwickelungen für den Fall, wo die Influenzelektricität auf einer sphärischen Fläche auftritt, zu verificiren, wollen wir hier mittelst derselben die elektrische Ladung bestimmen, welche auf einem isolirten, ursprünglich neutralen Conductor von ellipsoidischer Gestalt durch eine punktförmige, ins Unendliche gerückte elektrische Masse inducirt wird.

Die Axen $2a$, $2b$, $2c$ des Conductors E nehmen wir zu Coordinatenaxen und bezeichnen die Winkel zwischen diesen Axen und der Richtung, nach welcher die vertheilende Masse Q ins Unendliche gerückt ist, durch α, β, γ. Es leuchtet alsdann

ein, dass das Potential der Masse Q mit der Grenze zusammenfällt, welcher sich der Ausdruck

$$\frac{Q}{\sqrt{(R\cos\alpha - x)^2 + (R\cos\beta - y)^2 + (R\cos\gamma - z)^2}}$$

nähert, wenn die Grösse R über alle Grenzen hinaus wächst. Für den veränderlichen Theil dieser Grenze, welcher offenbar für sich in unserer Frage als inducirendes Potential aufgefasst werden kann, findet man, wenn die Grenze des Quotienten $Q : R^2$ durch K bezeichnet wird:

$$K\{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\} = V.$$

Die Niveauflächen dieses Potentiales sind eben und stehen auf der Richtung α, β, γ senkrecht, die Kraftlinien sind gerade und mit der genannten Richtung parallel, die Grösse der Kraft endlich ist allenthalben gleich K. Es möge nebenbei bemerkt werden, dass man einen Raum, welcher von ebenen Niveauflächen durchzogen wird, ein gleichförmiges elektrisches Feld nennt.

Aus der Form des Potentiales erhellt, dass die gesuchte Ladung angesehen werden kann als Uebereinanderlagerung der drei Ladungen, welche den einzelnen Componenten der vertheilenden Kraft entsprechen. Mit Rücksicht hierauf bestimmen wir zunächst die durch das Potential $V = x$ bewirkte Vertheilung. Es seien r, φ, θ räumliche Polarcoordinaten, deren Pol in einem Punkte x, y, z innerhalb des Ellipsoides liegt, deren Axe mit der Axe der x parallel läuft, und deren Fundamentalebene auf der Axe der z senkrecht steht. Alsdann haben wir, wenn wir die rechtwinkligen Coordinaten eines Elementes der Oberfläche accentuiren, übrigens aber die frühere Bezeichnungsweise beibehalten:

$$4\pi V' = \int V\,d\sigma = \int x'\,d\sigma = \int (x + r\cos\varphi)\,d\sigma,$$

woraus folgt:

$$4\pi V' = 4\pi x + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi\; r\sin\varphi\cos\varphi.$$

Das letzte Integral stellt aber offenbar die x-Componente der Anziehung dar, welche die Masse Eins, in den Punkt x, y, z concentrirt, seitens des gleichförmig mit Masse von der

Dichtigkeit Eins erfüllten Ellipsoides erfährt, hierbei die Attractions-Constante gleich Eins gesetzt. Bezeichnen wir also durch A die absolute Anziehung, welche die Masse Eins von dem Ellipsoide erleidet, wenn sie in einem Scheitel der Axe $2a$ liegt, so hat man:

$$V' = \left(1 - \frac{A}{4\pi a}\right) x.$$

Wir schliessen hieraus, dass allgemein zu setzen ist:

$$V^{(\nu)} = \left(1 - \frac{A}{4\pi a}\right)^{\nu} x.$$

Da der Quotient $A : 4\pi a$, wie leicht zu finden, kleiner als 1 ist, so kommt:

$$\sum_0^{\infty} V^{(\nu)} = \frac{4\pi a}{A} \cdot x.$$

Hiernach ergiebt sich endlich für die durch das Potential $V = x$ inducirte Dichtigkeit, wenn $\mathfrak{a}$ den Winkel zwischen der auswärts gerichteten Normale des Ellipsoides und der Axe der x bedeutet:

$$\varrho = - \frac{a \cos \mathfrak{a}}{A},$$

und man bemerke, dass der letzte Ausdruck proportional ist mit der kürzesten Entfernung des Ellipsoides E von einem zweiten Ellipsoide, welches erhalten wird, wenn man jenes um eine verschwindend kleine Grösse parallel mit der x-Axe verschiebt.

Aus dem oben gewonnenen Resultate ist es jetzt leicht, den elektrischen Zustand zu bestimmen, welchen der Conductor unter der Einwirkung des Potentiales

$$V = K \{ x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma \}$$

darbietet. Man construire ein Hülfsellipsoid $\mathfrak{E}$, dessen Axen $2\mathfrak{A}$, $2\mathfrak{B}$, $2\mathfrak{C}$ in die des Conductors fallen und so bestimmt sind, dass man hat:

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{A}{a} = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta^2 \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{\left(\cos\theta^2 + \frac{a^2}{b^2}\sin\theta^2\right)\left(\cos\theta^2 + \frac{a^2}{c^2}\sin\theta^2\right)}},$$

$$\mathfrak{B}^2 = \frac{B}{b} = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta^2 \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\left(\cos\theta^2 + \frac{b^2}{a^2}\sin\theta^2\right)\left(\cos\theta^2 + \frac{b^2}{c^2}\sin\theta^2\right)}},$$

$$\mathfrak{C}^2 = \frac{C}{c} = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta^2 \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\left(\cos\theta^2 + \frac{c^2}{a^2}\sin\theta^2\right)\left(\cos\theta^2 + \frac{c^2}{b^2}\sin\theta^2\right)}}.$$

In dem Ellipsoide $\mathfrak{E}$ ziehe man den Radius q nach der Richtung α, β, γ, nach welcher die Masse Q ins Unendliche gerückt ist. In dem Endpunkte des Radius lege man eine Tangentialebene an das Ellipsoid und fälle auf dieselbe aus dem Mittelpunkte ein Perpendikel p. Nach der Richtung dieses Perpendikels verschiebe man das Ellipsoid E in eine neue Lage E', so dass, unter ε eine verschwindend kleine positive Grösse verstanden, die Verschiebung den Betrag

$$\frac{\varepsilon K}{p q}$$

erlangt. Füllt man nun endlich das Ellipsoid E mit elektrischer Masse, welche die absolute Dichtigkeit $\frac{1}{\varepsilon}$ hat und mit der Masse Q gleichnamig ist, das Ellipsoid E' aber mit ebenso dichter entgegengesetzter Elektricität, so stellen die in dieser Weise geladenen Ellipsoide E und E' in ihrer Gemeinschaft genommen den von der Masse Q oder der Kraft K inducirten elektrischen Zustand dar.

Die Axen des Hülfsellipsoides lassen sich mittelst der elliptischen Functionen berechnen. Es sei nämlich:

$$a > b > c;$$

alsdann setze man:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} = m^2, \quad \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} = n^2,$$

und bestimme den zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Bogen φ, für welchen:

$$\cos\varphi = \frac{c}{a}.$$

Hiernach berechne man folgende Ausdrücke, in welchen die

bei den elliptischen Functionen gewöhnliche Bezeichnungsweise angewandt ist:

$$X = \frac{1}{m^2}\left\{F(m, \varphi) - E(m, \varphi)\right\},$$

$$Y = \frac{1}{m^2 n^2}\left\{E(m, \varphi) - \frac{m^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta(m, \varphi)}\right\} - \frac{1}{m^2} F(m, \varphi),$$

$$Z = \frac{1}{n^2}\left\{\Delta(m, \varphi) \cdot \operatorname{tang}\varphi - E(m, \varphi)\right\}.$$

Alsdann hat man, wenn noch

$$\frac{4\pi\, a b c}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} = H$$

gesetzt wird:

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{A}{a} = HX,\ \mathfrak{B}^2 = \frac{B}{b} = HY,\ \mathfrak{C}^2 = \frac{C}{c} = HZ.$$

Man bemerke noch, dass die grösste und kleinste Axe des Hülfsellipsoides beziehungsweise in die kleinste und grösste Axe des Conductors fällt. Nehmen wir nämlich an, es sei:

$$a > b > c,$$

so ist auch:

$$\frac{a}{b} > \frac{b}{a} > \frac{c}{a} \text{ und } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} > \frac{c}{b},$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{C}.$$

Die Bestimmung der statischen Verhältnisse des Conductors bietet nunmehr keine Schwierigkeit dar.

Man findet ohne Weiteres, dass die am Conductor wirkenden elektrischen Kräfte sich ersetzen lassen durch ein Kräftepaar, welches in der durch die Linien p und q bestimmten Ebene liegt, welches strebt, die Linie p auf dem kürzesten Wege in die Linie q zu drehen, und dessen Moment gleich ist:

$$EK^2 \cdot \frac{\sin\delta}{pq},$$

wenn E das Volumen des Conductors, δ den Winkel zwischen p und q bedeutet. Dies Resultat lässt sich auch durch Betrachtung des Potentiales der Elektricität in Bezug auf sich selbst ableiten, und wir wollen hier zeigen, wie allgemein die Bedingungen für das Gleichgewicht eines beweglichen isolirten Con-

ductors, der von einem Idiolelektricum influencirt wird, mit Hülfe jener Function gefunden werden können.

Es sei V das Potential eines Idioelektricums, ϱ die Dichtigkeit der Elektricität auf einem isolirten Conductor, welcher unter der Influenz des Idioelektricums steht, und U das Potential der Ladung. Alsdann hat man für den veränderlichen Theil des halben Potentiales der gesammten Elektricität in Bezug auf sich selbst:

$$W = \int \left(\frac{1}{2} U + V \right) \varrho \, ds.$$

Es werde nun der Conductor in eine neue Lage versetzt, wie die Art seiner Beweglichkeit es gestattet und so, dass jeder seiner Punkte einen unendlich kleinen Weg beschreibt. Nachdem sich das elektrische Gleichgewicht wiederum hergestellt hat, weist die Grösse W eine verschwindend kleine Aenderung δW auf. Man hat alsdann in Gemässheit des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten, wenn noch δP die negative Arbeit der Kräfte bedeutet, welche neben den elektrischen Kräften am Conductor wirken:

$$\delta P + \delta W = 0.$$

Aus letzterer Gleichung lassen sich, sobald W bekannt ist, für jede Lage des Conductors die nicht elektrischen Kräfte bestimmen, welche den am Conductor wirkenden elektrischen Kräften das Gleichgewicht halten, und wenn jene Kräfte gegeben sind, so lässt sich die Lage des Conductors bestimmen, in welcher Gleichgewicht stattfindet. Wenn die Grösse $P + W$ für eine bestimmte Lage ein unbedingtes Minimum aufweist, so findet stabiles Gleichgewicht statt, im entgegengesetzten Falle ist das Gleichgewicht labil, und wenn im Besonderen jene Summe für die zulässigen Versetzungen des Conductors constant bleibt, so ist das Gleichgewicht indifferent.

Für die Variation von W hat man:

$$\delta W = \int \left\{ \left(\frac{1}{2} U + V \right) \delta \varrho + \varrho \, \delta \left(\frac{1}{2} U + V \right) \right\} ds.$$

Da aber der Conductor isolirt und mithin bei den in Betracht kommenden Versetzungen die Quantität der Ladung un-

geändert bleibt, so ist in Gemässheit der Bedingungen für das elektrische Gleichgewicht:

$$\int\left\{\left(\frac{1}{2}\,U+V\right)\delta\varrho+\varrho\delta\left(\frac{1}{2}\,U\right)\right\}ds=0;$$

mithin hat man auch:

$$\delta\,W=\int\varrho\,\delta\,V ds.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung erhellt auch aus der Bemerkung, dass sich die Kräfte zwischen den einzelnen Theilen der Ladung gegenseitig das Gleichgewicht halten, die Kräfte zwischen dem Conductor und dem Inducenten aber dieselben sind, wie wenn jener ein Isolator und seine Ladung nicht beweglich wäre.

Bezeichnen wir das Gesammtpotential im Inneren des Conductors durch G, so ist auch für die Oberfläche:

$$U+V=G;$$

hiernach kann man, wenn noch die Ladung des Conductors durch Q bezeichnet wird, schreiben:

$$W=\frac{1}{2}\,G\,Q+\frac{1}{2}\int\varrho\,V ds.$$

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich leicht auf den Fall ausdehnen, wo der Conductor abgeleitet ist, indem man von zwei isolirten Conductoren, die mit einander durch einen verschwindend dünnen Draht verbunden sind, ausgeht. Solches dem Leser überlassend wenden wir uns zu dem ellipsoidischen Conductor im homogenen Felde zurück. Die Quantität seiner Ladung wurde gleich Null angenommen. Ferner bemerke man, dass das Potential eines im Unendlichen gelegenen Punktes in Bezug auf einen im Endlichen gelegenen Körper gleichkommt dem Potential in Bezug auf die Masse des Körpers, letztere in den Schwerpunkt concentrirt gedacht. Hiernach ergiebt sich:

$$W=\frac{1}{2}\int\varrho\,V ds=-\frac{EK^2}{2}\cdot\frac{\cos\delta}{pq},$$

oder, da p gleich $q\cos\delta$ ist:

$$W=-\frac{EK^2}{2\,q^2}.$$

Wir verweisen den Leser, um Wiederholungen zu vermei-

den, wegen der Folgerungen, welche sich an die letzte Formel hinsichtlich besonders interessanter Fälle des Gleichgewichtes und der Bewegung des ellipsoidischen Conductors anknüpfen lassen, auf die später folgende Untersuchung über die Magnetisirung eines Ellipsoides im homogenen magnetischen Felde und bemerken noch, dass die obigen Ergebnisse als Grundlage für eine Methode, die Intensität einer gegebenen constanten elektrischen Kraft auf absolutes Maass zurückzuführen, dienen können.

V.

VOM GLEICHGEWICHTE DER ELEKTRICITÄT AUF ZWEI EINANDER INFLUENCIRENDEN CONDUCTOREN.

1. Allgemeine Betrachtungen.

Bei einem beliebigen Systeme von leitenden und idioelektrischen Körpern ist das Gleichgewicht der Elektricität an die Bedingung geknüpft, dass das Potential der sämmtlichen in dem Systeme enthaltenen Elektricität in allen Punkten eines Conductors einen gleichen Werth aufweise, welcher Werth aber für die verschiedenen Conductoren keineswegs ein und derselbe zu sein braucht. Wenn einer der Conductoren abgeleitet ist, so muss das Gesammtpotential in seinem Inneren den Werth 0 haben, und wenn zwei Conductoren mit einander in leitender Verbindung stehen, so muss das Gesammtpotential in beiden einen und denselben Werth haben. Wir beschränken uns in der Folge auf die nähere Betrachtung des elektrischen Gleichgewichtes bei zwei Conductoren, von welchen der eine sich im Wirkungskreise des anderen befindet. Hier lässt sich die Bestimmung des Gleichgewichtes unter Anderem stets auf die beiden Fälle zurückführen, wo einer der Conductoren abgeleitet ist, während der andere isolirt und mit einer solchen Ladung versehen ist, dass in seinem Inneren das Gesammtpotential 1 herrscht. Um nun zuvörderst diese besonderen Gleichgewichtszustände mittelst der bisher gewonnenen Resultate zu ermitteln, wenden wir folgendes Verfahren an, welches der Hauptsache nach zuerst von Murphy angegeben wurde.

Ueber die Oberfläche des isolirten Conductors werde ein Quantum Elektricität von der Grösse und in der Art ausgebreitet, dass es in jedem Punkte des Conductors das Potential 1 erzeugt. Jene Ladung werde durch q^0 bezeichnet. Die Ladung q^0 denke man sich als eine feste elektrische Masse, und als solche rufe sie auf dem zweiten, abgeleiteten Conductor die Ladung q' hervor. Man denke sich jetzt die Ladung q' als fest und den ersten Conductor als abgeleitet; die Ladung, welche alsdann auf letzterem durch q' inducirt wird, heisse q''. Ferner sei q''' die Ladung, welche von der als fest gedachten Ladung q'' des ersten Conductors auf dem zweiten Conductor inducirt wird, sobald letzterer mit der Erde in Verbindung gesetzt wird. In dieser Weise ohne Ende fortfahrend, erhalten wir auf dem ursprünglich isolirten Conductor nach und nach die Ladungen q^0, q'', q^{IV} u. s. f., auf dem ursprünglich abgeleiteten Conductor die Ladungen q', q''', q^V u. s. f. Man bilde nunmehr die aus q^0, q'', q^{IV} u. s. f. resultirende Ladung, d. h. die Ladung, deren Dichtigkeit gleichkommt der Summe der Dichtigkeiten, oder deren Potential gleichkommt der Summe der Potentiale der genannten Ladungen, und ebenso bilde man die aus den Ladungen q', q''', q^V u. s. f. resultirende Ladung. Es sind alsdann die beiden so gewonnenen Ladungen die gesuchten, für welche in dem isolirten Conductor das Potential sämmtlicher Elektricität allenthalben den Werth 1, im abgeleiteten Conductor allenthalben den Werth 0 aufweist. In der That, das Gesammtpotential der Ladungen q^0 und q', das der Ladungen q'' und q''' u. s. f. hat innerhalb des abgeleiteten Conductors den Werth 0. Im Inneren des isolirten Conductors aber ist das Potential der Ladung q^0 gleich 1 und verschwindet das Gesammtpotential der Ladungen q' und q'', das der Ladungen q''' und q^{IV} u. s. f. Endlich bemerke man noch, dass dem Früheren zufolge die Dichtigkeit einer jeden einzelnen Theilladung allenthalben ein und dasselbe Vorzeichen aufweist, und dass die absoluten Werthe der Quantitäten der Ladungen q^0, q', q''..., folglich auch die Potentiale dieser Ladungen für irgend einen bestimmten Punkt eine convergente Reihe bilden. Aus alle dem folgt, dass das Gesammtpotential der beiden resultirenden Ladungen in dem isolirten Conductor allenthalben gleich 1 ist, in dem abgeleiteten Con-

ductor aber verschwindet, so dass die Ladungen sich im Gleichgewichte befinden. Auch ergiebt sich noch, dass die ganze Oberfläche des isolirten Conductors mit positiver, die ganze Oberfläche des abgeleiteten Conductors mit negativer Elektricität bedeckt ist, und dass die Quantität der auf dem ersten Conductor befindlichen Ladung die des zweiten Conductors an absoluter Grösse übertrifft. Der oben erörterte elektrische Gleichgewichtszustand zweier Conductoren kann als das Ergebniss einer unendlichen Reihe von aufeinander folgenden fictiven Inductionsacten angesehen werden, wobei jedesmal eine feste Ladung des einen Conductors auf den anderen, abgeleiteten Conductor inducirend einwirkt. Der erste Inductionsact besteht darin, dass die als fest gedachte Ladung q^0 des isolirten Conductors, welche als bewegliche Ladung für sich im Gleichgewichte ist, auf dem abgeleiteten Conductor die Ladung q' inducirt. In dem zweiten Inductionsacte hat man sich q^0 und q' als fest, den ursprünglich isolirten Conductor als abgeleitet zu denken, und ruft q' auf dem letzt genannten Conductor die Ladung q'' hervor u. s. f.

Es erübrigt jetzt noch zu zeigen, wie jede den Bedingungen des Gleichgewichtes genügende Ladungsweise zweier Conductoren auf die beiden particulären Gleichgewichtsladungen, welchen die inneren Potentiale 0 und 1 entsprechen, zurückgeführt werden könne. Für die eine dieser Ladungen sei $V_1{}^I$ das Potential des Conductors, in welchem das Gesammtpotential den Werth 1 hat, $V_2{}^I$ das des zweiten Conductors, in welchem das Gesammtpotential gleich 0 ist. Für die andere Ladungsweise sei $V_1{}^{II}$ das Potential des ersten Conductors, in welchem jetzt das Gesammtpotential gleich 0 ist, und $V_2{}^{II}$ das des zweiten Conductors mit dem inneren Gesammtpotentiale 1. Man hat alsdann für eine Ladungsweise, wobei das Gesammtpotential in dem ersten Conductor den Werth G_1, in dem zweiten Conductor den Werth G_2 hat, $G_1 V_1{}^I + G_2 V_1{}^{II}$ als Potential des ersten und $G_1 V_2{}^I + G_2 V_2{}^{II}$ als Potential des zweiten Conductors.

Die gegenseitigen Wirkungen der Ladungen auf zwei einander influencirenden Conductoren lassen sich unter Anderem mittelst des halben Potentiales der gesammten Elektricität in

Bezug auf sich selbst ermitteln. Für diese Grösse hat man, wenn Q_1, Q_2 die Quantitäten der Ladungen und G_1, G_2 die bezüglichen Werthe des inneren Gesammtpotentiales sind:

$$W = \frac{1}{2}(G_1 Q_1 + G_2 Q_2).$$

Beispiele von solchen Gleichgewichtszuständen, wie sie oben erörtert wurden, lassen sich leicht aus schicklich gewählten Potentialfunctionen ableiten. In der That, es seien erstlich S_1 und S_2 zwei geschlossene Niveauflächen einer Potentialfunction V, welche ganz auseinander liegen, die entsprechenden Potentialwerthe seien A_1 und A_2. Die erste Fläche schliesse den Theil Q_1, die zweite den Rest Q_2 der Massen ein, welche das Potential V erzeugen. Unter N_1, N_2 die auswärts gerichteten Normalen der Flächen verstanden, belege man die erste Fläche mit elektrischem Fluidum von der Dichtigkeit $-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{dV}{dN_1}$, die zweite mit elektrischem Fluidum von der Dichtigkeit $-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{dV}{dN_2}$. Hiermit hat man die Anordnung der Elektricität erhalten, wie sie auf zwei von den Flächen S_1 und S_2 begrenzten Conductoren auftreten würde, wenn man letztere bezüglich mit den Quantitäten Q_1 und Q_2 lüde. Das Gesammtpotential dieser Ladungen fällt ausserhalb und auf den Conductoren mit V zusammen, so dass es auf und in dem einen Conductor den Werth A_1, auf und in dem anderen Conductor den Werth A_2 hat. Es seien zweitens S_1 und S_2 wiederum geschlossene Niveauflächen der Potentialfunction V, von welchen aber jetzt die erste mit dem Potentialwerthe A_1 ganz innerhalb der zweiten mit dem Potentialwerthe A_2 liege. Von den Massen, welche das Potential V erzeugen, werde ein Theil Q_1 von der ersten Fläche eingeschlossen, während der Rest Q_2 ausserhalb der zweiten Fläche liege. Die erste Fläche denke man sich als Oberfläche eines Conductors, die zweite Fläche als Oberfläche einer Höhlung in einem zweiten Conductor, welcher also den ersten umschliesst. Belegt man alsdann die Oberfläche des ersten Conductors mit Elektricität von der Dichtigkeit $-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{dV}{dN_1}$, die Oberfläche der Höhlung im zweiten Conductor mit Elektrici-

tät von der Dichtigkeit $\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dN_2}$, so findet für diese Ladungen elektrisches Gleichgewicht statt. Die Quantität der Ladung auf dem eingeschlossenen Conductor ist gleich Q_1, die auf der Oberfläche der Höhlung ist gleich $- Q_1$. Das Gesammtpotential beider Ladungen ist in dem Zwischenraume zwischen beiden Conductoren gleich $V - A_2$; dasselbe hat also auf und in dem eingeschlossenen Conductor den Werth $A_1 - A_2$, auf und ausserhalb der Oberfläche der Höhlung den Werth 0.

2. Gegenseitige Influenz zweier sphärischer Conductoren. Bestimmung der Ladung eines sphärischen Conductors nach absolutem Maasse.

Die vorhergehende Methode wollen wir auf die Untersuchung der elektrischen Verhältnisse zweier Kugeln anwenden, von welchen die eine isolirt und geladen, die andere aber mit der Erde durch einen verschwindend dünnen Draht in leitende Verbindung gesetzt ist. Die Radien der Kugeln seien bezüglich R_1 und R_2, die Entfernung ihrer Mittelpunkte sei S.

Ueber die erste Kugel mit dem Radius R_1 breiten wir gleichförmig die Ladung $q^0 = R_1$ aus, der das Potential 1 entspricht. Diese Ladung wirkt nach aussen wie ein Punkt p^0 im Mittelpunkte jener Kugel mit der Quantität q^0. Die im ersten Inductionsacte von q^0 erzeugte Ladung q' der zweiten abgeleiteten Kugel lässt sich für jede nach aussen hin gehende Wirkung durch den elektrischen Bildpunkt p' von p^0 mit der Masse q' ersetzen, und nach dem Früheren bestimmt sich sowohl die Lage wie auch die Quantität dieses Bildpunktes. Die Fortsetzung obiger Betrachtung lässt ersehen, dass die Wirkungen der schliesslichen Ladungen beider Kugeln sich durch die einer Reihe von Punkten ersetzen lassen, welche bei jeder Kugel auf dem nach dem Mittelpunkte der anderen Kugel hingehenden Radius gelegen sind. Für einen solchen Punkt wollen wir die

Entfernungen von den Mittelpunkten der Kugeln bezüglich durch t_1 und t_2 bezeichnen. Man findet alsdann folgende Beziehungen für die aufeinander folgenden Theilladungen, wodurch der Endzustand des Gleichgewichtes vollständig bestimmt ist, indem die einzelne Ladung der Kugelfläche vollständig bekannt ist, sobald die Lage und Masse des Punktes bekannt sind, durch welchen ihre Wirkung nach aussen ersetzt werden kann:

$$
\begin{array}{lll}
q^0 = R_1 & t_1^0 = 0 & t_2^0 = S \\
q' = -q^0 \dfrac{R_2}{t_2^0} & t_2' t_2^0 = R_2^2 & t_1' = S - t_2' \\
q'' = -q' \dfrac{R_1}{t_1'} & t_1'' t_1' = R_1^2 & t_2'' = S - t_1'' \\
q''' = -q'' \dfrac{R_2}{t_2''} & t_2''' t_2'' = R_2^2 & t_1''' = S - t_2''' \\
q^{IV} = -q''' \dfrac{R_1}{t_1'''} & t_1^{IV} t_1''' = R_1^2 & t_2^{IV} = S - t_1^{IV} \\
\text{u. s. f.} & \text{u. s. f.} & \text{u. s. f.}
\end{array}
$$

Für die Berechnung der Grössen t, durch welche sich auch die Grössen q bestimmen, wird die Bemerkung von Nutzen sein, dass die Entfernungen der Bilder, welche die erste Kugel einschliesst, von dem Mittelpunkte dieser Kugel nichts anderes als der 0., 2., 4. u. s. w. Partialbruch des folgenden Kettenbruches sind:

$$
\cfrac{R_1^2}{S - \cfrac{R_2^2}{S - \cfrac{R_1^2}{S - \text{etc.}}}} = \frac{1}{2S}\left\{S^2 + R_1^2 - R_2^2 - \sqrt{(S^2 + R_1^2 + R_2^2)^2 - 4 R_1^2 S^2}\right\}
$$

Die analogen Entfernungen für die in der zweiten Kugel enthaltenen Bilder sind der 1., 3., 5. u. s. w. Partialbruch des folgenden Kettenbruches:

$$
\cfrac{R_2^2}{S - \cfrac{R_1^2}{S - \cfrac{R_2^2}{S - \text{etc.}}}} = \frac{1}{2S}\left\{S^2 + R_2^2 - R_1^2 - \sqrt{(S^2 + R_1^2 + R_2^2)^2 - 4 R_2^2 S^2}\right\}
$$

Aus Obigem findet man für die Gesammtladung Q_1, Q_2 der einen und anderen Kugel:

$$Q_1 = q^0 + q'' + q^{IV} + \cdots,$$
$$Q_2 = q' + q''' + q^V + \cdots.$$

Ferner ergiebt sich für die äusseren und inneren Potentiale, wenn die Entfernung von einem Bildpunkte, in dem die Masse $q^{(\nu)}$ concentrirt ist, durch $r^{(\nu)}$ bezeichnet wird:

$$V_1 = \frac{q^0}{r^0} + \frac{q''}{r''} + \frac{q^{IV}}{r^{IV}} + \cdots, \quad V_1' = 1 - \frac{q'}{r'} - \frac{q'''}{r'''} - \cdots,$$

$$V_2 = \frac{q'}{r'} + \frac{q'''}{r'''} + \frac{q^V}{r^V} + \cdots, \quad V_2' = -\frac{q^0}{r^0} - \frac{q''}{r''} - \frac{q^{IV}}{r^{IV}} - \cdots.$$

Obige Reihen convergiren im Allgemeinen; sie convergiren aber um so weniger stark, je näher die beiden Kugeln aneinander rücken, und verlieren endlich ihre Convergenz, wenn die Kugeln zur Berührung kommen.

Indem wir die Formel:

$$\varrho = -\frac{Q}{4\pi R} \cdot \frac{t^2 - R^2}{r^3}$$

für die auf einer Kugel durch einen äusseren Punkt inducirte Ladung in Anwendung bringen, ergeben sich leicht die Entwickelungen für die Dichtigkeiten der Elektricität auf den beiden betrachteten Sphären. Wir bezeichnen jene bezüglich durch ϱ_1 und ϱ_2, den Ausdruck $\sqrt{t_1^{(\nu)2} - R_1^2}$ oder $\sqrt{t_2^{(\nu)2} - R_2^2}$, d. i. die Länge der Tangente, die von einem Bildpunkte in der einen Kugel an die andere Kugel gezogen werden kann, durch $U^{(\nu)}$. Es ist alsdann:

$$4\pi R_1 \varrho_1 = 1 - \frac{q' U'^2}{r'^3} - \frac{q''' U'''^2}{r'''^3} - \cdots,$$

$$4\pi R_2 \varrho_2 = -\frac{q^0 U^{0\,2}}{r^{0\,3}} - \frac{q'' U''^2}{r''^3} - \frac{q^{IV} U^{IV\,2}}{r^{IV\,3}} - \cdots.$$

Auf den oben erörterten Fall lässt sich leicht das Gleichgewicht einer jeden Ladung, die einem Systeme von zwei sphärischen Conductoren mitgetheilt wird, zurückführen. Ohne weiteres ergeben sich aus den gewonnenen Resultaten für ein solches System folgende allgemeine Regeln.

a. Wenn eine der Kugeln abgeleitet ist, so sind beide Kugeln allenthalben mit Elektricität bedeckt und zwar die eine mit positiver, die andere mit negativer. Auf jeder der Kugeln nimmt die absolute Dichtigkeit mit wachsender Entfernung von dem der anderen Kugel zunächst gelegenen Punkte, dem Pole,

stetig ab, und es ist natürlich die Dichtigkeit blos eine Function der Entfernung vom Pole. Die Ladung der isolirten Kugel stimmt hinsichtlich des Vorzeichens mit dem Potentialwerthe überein.

b. Wenn das Gesammtpotential in der einen Kugel einen positiven, in der anderen einen negativen Werth hat, so ist auch auf jener die Dichtigkeit allenthalben positiv, auf dieser allenthalben negativ. Ueber den Verlauf der absoluten Dichtigkeit lässt sich dasselbe wie im vorhergehenden Falle aussagen.

c. Das Gesammtpotential habe in beiden Kugeln einen gleichen Werth. Die Dichtigkeit stimmt alsdann auf beiden Kugeln hinsichtlich des Vorzeichens mit dem Potentiale überein. Der absolute Werth der Dichtigkeit nimmt mit wachsender Entfernung vom Pole stetig zu.

d. In beiden Kugeln weise das Gesammtpotential dasselbe Vorzeichen auf, aber in der einen Kugel einen grösseren absoluten Werth, als in der anderen. Jene ist alsdann allenthalben mit Elektricität bedeckt, deren Vorzeichen mit dem des Potentiales übereinstimmt. Auf der anderen Kugel nimmt die Dichtigkeit der Ladung (nicht der absolute Werth der Dichtigkeit) mit wachsender Polardistanz stetig zu oder ab, je nachdem das Potential bezüglich positiv oder negativ ist. Auf dieser Kugel kann die Dichtigkeit für eine gewisse Polardistanz verschwinden, und es lässt sich stets das Verhältniss der Potentialwerthe in beiden Kugeln so bestimmen, dass die Dichtigkeit für eine gegebene Polardistanz verschwindet.

Eine besondere Betrachtung erheischt der Fall, wo die beiden Kugeln sich berühren. Wir nehmen wiederum an, dass die eine Kugel isolirt, die andere abgeleitet ist, und dass in jener das Potential den Werth Eins hat. Man findet aus dem Obigen für einen Punkt, der auf der Centrallinie innerhalb des ersten, d. i. isolirten Conductors in der Entfernung t_1 vom Mittelpunkte liegt:

$$\frac{V_1'}{R_1 R_2} = \sum_0^\infty \left(R_1 R_2 + n\,[R_1 + R_2]\,[R_1 - t_1]\right)^{-1}.$$

Und in analoger Weise ergiebt sich für den zweiten Conductor:

$$\frac{V_2'}{R_1 R_2} = -\sum_0^\infty \left(R_1 t_2 + [n+1]\,[R_1 + R_2]\,[R_2 - t_2]\right)^{-1}.$$

Für die erste, übrigens divergente Reihe kann man schreiben:

$$\frac{1}{(R_1 + R_2)(R_1 - t_1)} \sum_0^\infty \frac{1}{p+n},$$

wo zu setzen ist:

$$p = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)(R_1 - t_1)}.$$

Da nun allgemein

$$\frac{1}{a} = \int_0^1 x^{a-1}\,dx$$

ist, so fallen die Glieder der ersten Entwicklung mit den Gliedern zusammen, die sich ergeben, wenn man in dem Ausdruck

$$\frac{1}{(R_1 + R_2)(R_1 - t_1)} \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x}\,dx$$

den Integranden nach steigenden Potenzen der Veränderlichen entwickelt und hierauf integrirt.

Ebenso ergeben sich die Glieder in der zweiten gleichfalls divergenten Entwicklung, wenn man den folgenden Ausdruck in analoger Weise umformt:

$$-\frac{1}{(R_1 + R_2)(R_2 - t_2)} \int_0^1 \frac{x^{q-1}}{1-x}\,dx,$$

wo zu setzen ist:

$$q = 1 + \frac{R_1 t_2}{(R_1 + R_2)(R_2 - t_2)}.$$

Die obigen Bemerkungen führen uns auf eine neue Form für das innere Potential in der Centrallinie, wenn sich die beiden Sphären leitend berühren und in ihnen das Potential Eins herrscht. Die Ladung besteht dann aus zwei Ladungen der oben betrachteten Art. Bei der einen dieser Ladungen ist die erste Kugel, bei der anderen Ladung die zweite Kugel als isolirt zu betrachten. Bei der ersten Ladung ist die Anfangsladung der ersten Kugel R_1, bei der zweiten ist die Anfangsladung der zweiten Kugel R_2. Für die auf der Centrale im Inneren der ersten Kugel befindlichen Punkte besteht das

von der Ladung dieser Kugel herrührende Potential aus dem oben durch V_1' bezeichneten Theil, sowie aus einem zweiten Theile, der aus V_2' durch Vertauschung der Marken 1 und 2 gewonnen wird. Bezeichnen wir das gedachte Potential durch U_1', so ist also für die Centrallinie im Inneren der ersten Kugel:

$$U_1' = R_1 R_2 \sum_0^\infty \left(R_1 R_2 + n\,[R_1 + R_2]\,[R_1 - t_1]\right)^{-1}$$

$$- R_1 R_2 \sum_0^\infty \left(R_2 t_1 + (n+1)\,[R_1 + R_2]\,[R_1 - t_1]\right)^{-1}$$

$$= \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)\,(R_1 - t_1)} \int_0^1 \frac{x^g - x^h}{1 - x}\,dx,$$

wo zu setzen ist:

$$g = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)\,(R_1 - t_1)} - 1, \quad h = \frac{R_2 t_1}{(R_1 + R_2)(R_1 - t_1)}.$$

Lässt man die Glieder der beiden Reihen in der ersten Form von U_1' mit einander abwechseln, so gewinnt man eine convergente Reihe, ebenso, wenn man in der so erhaltenen Reihe je zwei aufeinander folgende und dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Glieder in ein Glied zusammenzieht. Nur für den Berührungspunkt, oder den Pol der Kugel, d. h. für $t_1 = R_1$, hat die Entwicklung keine Summe und wird auch die Integralform unbestimmt. Es giebt aber dennoch die letztere über die Verhältnisse des gedachten Punktes Aufschluss. Wenn wir nämlich das Integral durch die Substitution

$$x = y^{R_1 - t_1}$$

umformen und vor der Integration den wahren Werth des Integranden für $t_1 = R_1$ auf dem gewöhnlichen Wege bestimmen, so finden wir erstlich, dass in dem gedachten Punkte:

$$U_1' = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Zweitens ergiebt sich:

$$\frac{d\,U_1'}{dt_1} = -\,\frac{1}{2\,(R_1 + R_2)}.$$

Hiernach lässt die Formel:

$$4\pi\varrho = \frac{V}{R} + 2\,\frac{dV'}{dt}$$

ersehen, dass in dem Berührungspunkte die Dichtigkeit verschwindet.

Aus der zusammengezogenen Reihenentwickelung für U_1' findet man, indem man $t_1 = 0$ setzt, und mit R_1 multiplicirt, für die Quantität der Ladung:

$$Q_1 = \frac{R_1^2}{R_1 + R_2}\left\{1 + \frac{1}{2(2+q)} + \frac{1}{3(3+2q)} + \frac{1}{4(4+3q)} + \cdots\right\}$$

wo zur Abkürzung $R_1 : R_2 = q$ gesetzt ist.

Wenn wir in der letzten Reihe für den Nenner des *n*ten Gliedes $n(n[1+q]-q)$ schreiben, das Verhältniss $1:1+q = \varepsilon$ einführen und nach Potenzen desselben entwickeln, so kommt:

$$\frac{Q_1}{R_1} = \varepsilon q\left\{1 + \frac{1}{q}\left[s_2(\varepsilon q) + s_3(\varepsilon q)^2 + \cdots\right]\right\},$$

wo zu setzen ist:

$$s_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots.$$

Durch Vertauschung von R_1 und R_2 finden wir ferner:

$$\frac{Q_2}{R_2} = \varepsilon\left\{1 + q\left[s_2\varepsilon + s_3\varepsilon^2 + \cdots\right]\right\}.$$

Es ist folglich, wenn noch:

$$\begin{aligned} s_2(\varepsilon q) + s_3(\varepsilon q)^2 + \cdots &= \Sigma \\ s_2\varepsilon + s_3\varepsilon^2 + \cdots &= \Sigma' \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{q^2 + q\Sigma}{1 + q\Sigma'}.$$

Je kleiner q ist, um so stärker convergirt die Reihe Σ, um so weniger aber die Reihe Σ'. Es lässt sich aber letztere wie folgt in einen Ausdruck umwandeln, der noch stärker wie die erste Reihe convergirt. Bekanntlich hat man:

$$log\,\Gamma(x) = -\,log\,x - Cx + \frac{1}{2}\,S_2x^2 - \frac{1}{3}\,S_3x^3 + \frac{1}{4}\,S_4x^4 - \cdots$$

$$log\,\Gamma(1-x) = Cx + \frac{1}{2}\,S_2x^2 + \frac{1}{3}\,S_3x^3 + \frac{1}{4}\,S_4x^4 + \cdots$$

wo C die Constante des Integrallogarithmus bedeutet und zu setzen ist:

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots = 1 + s_n.$$

Differentiirt man beide Gleichungen und setzt in die erste für x die Differenz $1 - x$, so kommt:

$$\frac{d \log \Gamma(1-x)}{dx} = C + \frac{1}{1-x} - (1-x) + (1-x)^2 - \cdots\cdots$$
$$- s_2(1-x) + s_3(1-x)^2 - \cdots\cdots$$

$$\frac{d \log \Gamma(1-x)}{dx} = C + x + x^2 + \cdots\cdots + s_2 x + s_3 x^2 + \cdots\cdots$$

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke rechter Hand und indem wir für x die Verhältnisszahl ε einsetzen, finden wir:

$$\Sigma' = \frac{1+q}{1+2q} - s_2(\varepsilon q) + s_3(\varepsilon q)^2 - \cdots\cdots$$

Wenden wir die obigen Formeln auf einen später zu erwähnenden Fall an, in welchem die Radien der Kugeln 1,1537 und 15,946 Centimeter maassen, so finden wir durch Berechnung von je vier Gliedern der auftretenden Reihen für das Verhältniss der Ladungen die Zahl 0,0079377. Die zur Berechnung erforderlichen Coefficienten s findet man u. a. in *Legendre's Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes.*

Wenn R_1 an Grösse abnimmt, so nähert sich Q_1 der Grenze

$$\frac{R_1^2}{R_2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = \frac{R_1^2}{R_2} \cdot \frac{\pi^2}{6};$$

zugleich nähert sich die Ladung Q_2 dem Grenzwerthe R_2. Hieraus folgt: Berührt man eine geladene Kugel mit einer zweiten Kugel, die gegen jene als verschwindend klein betrachtet werden kann, und entfernt hierauf wiederum beide Kugeln, so ist die Dichtigkeit der Elektricität auf der kleinen Kugel $\frac{\pi^2}{6}$ mal grösser als auf der grossen Kugel. Coulomb fand für jene Verhältnisszahl aus seinen Versuchen den Werth 2.

Die Kenntniss des Verhältnisses zwischen den Ladungen zweier sich berührender Kugeln ist für das Fractioniren eines gegebenen Quantums Elektricität erforderlich. Jenes Verhältniss kann für verschiedene zwischen 1 und 200 gelegene Verhältnisse der Radien aus der Tabelle entnommen werden, welche wir hier folgen lassen, indem wir zugleich auf eine von Plana

(Riess, die Lehre von der Reibungselektricität) berechnete Tabelle verweisen. Der Radius R_1 der ersten Kugel ist gleich Eins gesetzt, und für das Gesammtpotential innerhalb der Kugeln ist wie in der obigen Analyse der Werth Eins angenommen.

R_2	Q_1	Q_2	R_2	Q_1	Q_2	R_2	Q_1	Q_2
1	0,693147	0,693147	3,5	0,342234	3,254237	10	0,145786	9,872406
1,1	0,666998	0,790318	4,0	0,310234	3,769459	11	0,133931	10,881466
1,2	0,642530	0,888908	4,5	0,283665	4,283276	12	0,123857	11,889342
1,3	0,619625	0,988616	5,0	0,261261	4,795760	13	0,115191	12,896249
1,4	0,598167	1,089209	5,5	0,242120	5,307033	14	0,107658	13,902353
1,5	0,578061	1,190520	6,0	0,225583	5,817227	15	0,101048	14,907785
1,6	0,559146	1,292346	6,5	0,211152	6,326467	20	0,077313	19,927889
1,7	0,541382	1,394625	7,0	0,198451	6,834867	30	0,052597	29,949827
1,8	0,524658	1,497244	7,5	0,187188	7,342529	40	0,039855	39,961541
1,9	0,508893	1,600127	8,0	0,177131	7,849536	50	0,032082	49,968824
2,0	0,494013	1,703212	8,5	0,168098	8,355965	75	0,021567	74,978844
2,5	0,430690	2,220216	9,0	0,159940	8,861885	100	0,016429	99,983990
3,0	0,381484	2,737679	9,5	0,152536	9,367349	200	0,008173	199,99189

Es erübrigt noch die Anordnung der Elektricität auf dem einzelnen Conductor zu betrachten. Zur Bestimmung der Dichtigkeit reicht es hin, das innere Potential der Ladung einer Kugel zu kennen. Solches kann in ähnlicher Weise wie das Potential der Centrallinie im nächst Vorhergehenden aus den allgemeinen Potentialen zweier Kugeln, die in beliebiger Entfernung von einander liegen, abgeleitet werden; es kann dasselbe aber auch nach einer früher schon aufgeführten Methode aus dem Potential für die Punkte der Centrallinie gefunden werden. Das letztere Potential kann auf folgende Form gebracht werden:

$$U' = \sum \frac{1}{a_\nu - b_\nu t} - \sum \frac{1}{c_\nu - d_\nu t}.$$

Man hat es, um das allgemeine Potential V' für einen inneren Punkt zu erhalten, nach steigenden positiven Potenzen von t zu entwickeln und hierauf den Coefficienten der nten Potenz mit p_n, d. i. dem Coefficienten der nten Potenz von t in

der Entwicklung des Ausdrucks $(1 - 2t\cos\varphi + t^2)^{-1/2}$ zu multipliciren. Für das einzelne Glied ergiebt sich aber:

$$\frac{1}{a_\nu - b_\nu t} = \frac{1}{a_\nu}\left(1 + \left[\frac{b_\nu}{a_\nu}t\right] + \left[\frac{b_\nu}{a_\nu}t\right]^2 + \cdots\cdots\right).$$

Die Multiplication mit den Coefficienten p liefert:

$$\frac{1}{a_\nu}\left(p_0 + p_1\left[\frac{b_\nu}{a_\nu}t\right] + p_2\left[\frac{b_\nu}{a_\nu}t\right]^2 + \cdots\cdots\right) =$$

$$\frac{1}{a_\nu}\left(1 - 2\left[\frac{b_\nu}{a_\nu}t\right]\cos\varphi + \left[\frac{b_\nu}{a_\nu}t\right]^2\right)^{-1/2},$$

und mit Rücksicht hierauf also ist:

$$V' = \Sigma\,(a_\nu^2 - 2\,a_\nu b_\nu t\cos\varphi + b_\nu^2 t^2)^{-1/2}$$
$$- \Sigma\,(c_\nu^2 - 2\,c_\nu d_\nu t\cos\varphi + d_\nu^2 t^2)^{-1/2}.$$

Mittelst der so gewonnenen Reihen lässt sich nun für jeden Punkt, den Berührungspunkt ausgenommen, die Dichtigkeit berechnen. Poisson hat diese Berechnung für eine Anzahl Fälle, die Coulomb dem Versuche unterworfen hatte, ausgeführt. Wir lassen einige derselben zur Vergleichung der theoretischen und empirischen Ergebnisse hier folgen. Der Werth des Gesammtpotentials ist gleich Eins gesetzt, die Dichtigkeit in der Polardistanz φ durch $\varrho\,(\varphi)$ und die mittlere Dichtigkeit, d. i. die Quantität der Ladung, durch die Oberfläche dividirt, mit μ bezeichnet.

1. $R_1 = R_2 = 1$.

φ	0^0	30^0	60^0	90^0	180^0
$4\pi\varrho$	0,0	0,137	0,599	0,803	0,916

	$\varrho(90):\varrho(180)$	$\varrho(90):\varrho(60)$	$\varrho(90):\varrho(30)$	$\varrho(180):\mu$
Berechnet	0,877	1,342	5,857	1,322.
Beobachtet	0,95	1,25	4,80	1,27.

2. $R_1 = 1,\ R_2 = 2$.

φ	0^0	60^0	90^0	180^0
$4\pi\varrho_1$	0,0	0,321	0,577	0,781
$4\pi\varrho_2$	0,0		0,464	

	$\varrho_1(90):\varrho_2(90)$	$\varrho_1(180):\mu_2$	$\mu_1:\mu_2$
Berechnet	1,238	1,834	1,1601
Beobachtet	1,25	1,55	1,08

3. $R_1 = 1,\ R_2 = 4.$

φ	0^0	90^0	180^0
$4\pi\varrho_1$	0	0,349	0,584

	$\varrho_1(180):\varrho_1(90)$	$\varrho_1(180):\mu_2$	$\mu_1:\mu_2$
Berechnet	1,673	2,477	1,3168
Beobachtet	1,43	2,35	1,30

4. $R_1 = 1,\ R_2 = 8.$

	$\varrho_1(180):\mu_2$	$\mu_1:\mu_2$
Berechnet	3,087	1,4443
Beobachtet	3,18	1,65.

Von der Betrachtung der Influenz zwischen zwei elektrisirten Kugeln wenden wir uns zur Bestimmung der Kraft, mit welcher zwei gleich grosse elektrisirte Kugeln sich gegenseitig anziehen oder abstossen. Wir fassen zunächst den Fall ins Auge, wo die Kugeln einander berühren und mit gleichen Quantitäten geladen sind, so dass eine gegenseitige Abstossung stattfindet. Die Ladung der Kugeln können wir als aus zwei Ladungen bestehend betrachten, wie sie auftreten, wenn die eine Kugel isolirt, die andere abgeleitet ist. Für die Bildpunkte einer solchen Ladung hat man aber dem Früheren zufolge, wenn das Gesammtpotential in der isolirten Kugel und der Radius der Kugeln gleich Eins gesetzt, übrigens aber die bisherige Bezeichnungsweise beibehalten wird:

$$q^0 = 1,\quad q' = -\tfrac{1}{2},\quad q'' = \tfrac{1}{3},\quad q''' = -\tfrac{1}{4}\cdots\cdots$$
$$t_1{}^0 = 0,\quad t_1' = \tfrac{3}{2},\quad t_1'' = \tfrac{2}{3},\quad t_1''' = \tfrac{5}{4}\cdots\cdots$$
$$t_2{}^0 = 2,\quad t_2' = \tfrac{1}{2},\quad t_2'' = \tfrac{4}{3},\quad t_2''' = \tfrac{3}{4}\cdots\cdots$$

Da nun für beide Kugeln gleiche Verhältnisse bestehen, so folgt hieraus, dass die ganze Ladung der einzelnen Kugel sich auf elektrische Bilder zurückführen lässt, deren Massen die folgenden sind:

$$1,\quad -\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{1}{3},\quad -\tfrac{1}{4}\cdots\cdots$$

Und für die entsprechenden Entfernungen vom Mittelpunkte hat man:

$$0,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{4}\ldots.$$

Es werde jetzt die Masse eines Bildpunktes der einen Kugel durch q_n' und seine Entfernung vom Mittelpunkte durch t_n' bezeichnet, während die analogen Grössen für einen Bildpunkt der anderen Kugel q_n'' und t_n'' seien. Alsdann hat man, wie leicht einzusehen, für die Grösse der Abstossung, welche die Bildpunkte der einen Kugel durch die der anderen erleiden:

$$K = \Sigma\Sigma\,\frac{q_n'\,q_n''}{(2 - t_n' - t_n'')^2}.$$

Nun ist aber:

$$\Sigma\frac{q_n''}{(2 - t_n' - t_n'')^2} = \frac{1}{(2 - t_n')^2} - \frac{2}{(3 - 2t_n')^2} + \frac{3}{(4 - 3t_n')^2} - \cdots,$$

also auch:

$$K = 1\left\{\frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} - \cdots\right\} - 2\left\{\frac{1}{3^2} - \frac{2}{4^2} + \frac{3}{5^2} - \cdots\right\}$$

$$+ 3\left\{\frac{1}{4^2} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{6^2} - \cdots\right\} - 4\left\{\frac{1}{5^2} - \frac{2}{6^2} + \frac{3}{7^2} - \cdots\right\}$$

$$+ \cdots\cdots$$

Um zunächst die hier auftretenden Reihen zu summiren, bemerke man, dass für jedes positive n, das grösser als Eins ist,

$$\frac{1}{(n+1)^2} = \int_0^1 x^n \log\frac{1}{x}\,dx$$

ist. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{(n+2)^2} + \frac{3}{(n+3)^2} - \cdots = \int_0^1 x^n \log\frac{1}{x}\,dx$$

$$- \int_0^1 2x^{n+1}\log\frac{1}{x}\,dx + \int_0^1 3x^{n+2}\log\frac{1}{x}\,dx - \cdots$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n \log\dfrac{1}{x}}{(1+x)^2}\,dx,$$

wonach man findet:

$$K = \int_0^1 \frac{x \log \frac{1}{x}}{(1+x)^2} (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots\cdots) dx$$

$$= - \int_0^1 \frac{x \log x}{(1+x)^4} dx,$$

oder:

$$K = \tfrac{1}{24} (4 \log 2 - 1) = 0{,}07386.$$

Da man in dem betrachteten Falle für die Ladung einer Kugel den Werth

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \cdots\cdots = \log 2$$

hat, so stellt sich also die Abstossung einer Kugel in dem Falle, wo jede der Kugeln die Ladung Q hat, dar durch:

$$0{,}15373\ Q^2.$$

Die Anziehung zweier Kugeln, die sich berühren, ohne dass eine Leitung stattfindet, ist unendlich gross, wenn ihre Ladungen solche sind, dass das Gesammtpotential in beiden Kugeln verschiedene Werthe hat.

Wir wollen jetzt zwei gleiche Kugeln betrachten, die sich nicht berühren, und über deren Ladungen Q_1 und Q_2 wir keine beschränkende Annahme machen. Um ihre Anziehung mittelst des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten zu finden, bilden wir das halbe Potential der Elektricität auf sich selbst; es ist, wenn G_1, G_2 das Gesammtpotential in der einen und anderen Kugel ist:

$$\tfrac{1}{2} (G_1 Q_1 + G_2 Q_2).$$

Die Variation, welche dieser Ausdruck erleidet, wenn man die Kugeln in der Richtung der Centrale einander nähert, oder von einander entfernt, kommt der negativen Arbeit der beiden Kräfte gleich, durch welche die Wirkungen zwischen den Kugeln dargestellt werden. Ist nun K diese Kraft für die eine Kugel und wird solche positiv genommen, wenn die Kugel von der anderen abgestossen wird, so ist also, wofern beide Kugeln isolirt sind und folglich die Quantitäten ungeändert bleiben:

$$K = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d\{G_1 Q_1 + G_2 Q_2\}}{dS}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{Q_1 \frac{dG_1}{dS} + Q_2 \frac{dG_2}{dS}\right\}.$$

Nach dem, was früher über die Influenz zweier Kugeln gefunden wurde, hat man:

$$Q_1 = G_1 \Sigma - G_2 \Sigma', \; Q_2 = G_2 \Sigma - G_1 \Sigma',$$

wo zu setzen ist:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{S^2 - 1} + \frac{1}{S^4 - 3S^2 + 1} + \cdots\cdots$$

$$\Sigma' = \frac{1}{S} + \frac{1}{S^3 - 2S} + \frac{1}{S^5 - 4S^3 + 3S} + \cdots\cdot$$

Indem man die obigen Gleichungen differentiirt und die Werthe von $\frac{dG_1}{dS}$ und $\frac{dG_2}{dS}$ einsetzt, findet man:

$$K = \frac{1}{2}\left\{(G_1^2 + G_2^2)\frac{d\Sigma}{dS} - 2G_1 G_2 \frac{d\Sigma'}{dS}\right\},$$

wodurch die fragliche Wirkung sich aus der Centrale und den Potentialwerthen bestimmt. Um dieselbe Grösse durch die Ladungen und die Centrale auszudrücken, lösen wir die beiden Gleichungen für Q_1 und Q_2 auf und finden:

$$G_1 = A Q_1 + B Q_2, \; G_2 = B Q_1 + A Q_2,$$

wo gesetzt ist:

$$\frac{\Sigma}{\Sigma^2 - \Sigma'^2} = A, \; \frac{\Sigma'}{\Sigma^2 - \Sigma'^2} = B.$$

Hiernach kommt:

$$K = \frac{1}{2}\left\{(Q_1^2 + Q_2^2) M - 2 Q_1 Q_2 N\right\},$$

wo zu setzen ist:

$$M = (A^2 + B^2)\frac{d\Sigma}{dS} - 2AB\frac{d\Sigma'}{dS},$$

$$N = (A^2 + B^2)\frac{d\Sigma'}{dS} - 2AB\frac{d\Sigma}{dS}.$$

Wenn eine der Kugeln abgeleitet ist, so verschwindet der Potentialwerth in ihr und bleibt nur die Ladung der anderen Kugel constant; alsdann ist, wenn G den Potentialwerth in der isolirten Kugel bedeutet:

$$K = \frac{G^2}{2} \cdot \frac{d\Sigma}{dS}.$$

Es möge hier eine von W. Thomson berechnete Tabelle Platz finden, welche die Werthe der Grössen Σ, Σ', $\frac{d\Sigma}{dS}$ und $\frac{d\Sigma'}{dS}$ für Werthe von S liefert, die von 2 bis 4, um ein Zehntel fortschreitend, anwachsen.

S	Σ	Σ'	$-\frac{1}{2}\frac{d\Sigma}{dS}$	$-\frac{1}{2}\frac{d\Sigma'}{dS}$
2,0	$\Sigma' + 0{,}693147$	∞	∞	$-\frac{1}{2}\frac{d\Sigma}{dS} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}073858$
2,1	1,58396	0,88175	1,13844	1,17439
2,2	1,43131	0,72378	0,52852	0,56350
2,3	1,34827	0,63395	0,32917	0,36357
2,4	1,29316	0,57202	0,23159	0,26464
2,5	1,25324	0,52537	0,17432	0,20630
2,6	1,22218	0,48819	0,13696	0,16787
2,7	1,19755	0,45746	0,11082	0,14090
2,8	1,17738	0,43140	0,09174	0,12073
2,9	1,16056	0,40886	0,07720	0,10526
3,0	1,14629	0,38908	0,06592	0,09299
3,1	1,13404	0,37151	0,05693	0,08304
3,2	1,12340	0,35571	0,04963	0,07481
3,3	1,11410	0,34150	0,04363	0,06791
3,4	1,10588	0,32852	0,03863	0,06203
3,5	1,09859	0,31663	0,03441	0,05697
3,6	1,09208	0,30569	0,03084	0,05257
3,7	1,08623	0,29557	0,02775	0,04872
3,8	1,08095	0,28617	0,02509	0,04531
3,9	1,07617	0,27742	0,02278	0,04229
4,0	1,07182	0,26924	0,02075	0,03958

Aus dem Obigen ergeben sich leicht folgende allgemeine Regeln über das Vorzeichen der Kraft K. Wenn beide Kugeln isolirt und mit ungleichnamigen Quantitäten geladen sind, so findet unter allen Umständen eine Anziehung statt, desgleichen, wenn die eine Kugel isolirt, die andere abgeleitet ist. Wenn

die Ladungen der Kugeln einander gleich sind, so stossen letztere einander in jeder Entfernung ab. Zwei gleiche Kugeln, die mit gleichartigen, aber ungleichen Elektricitätsmengen geladen sind, üben bei einer gewissen Entfernung keine Wirkung auf einander aus. Bei jeder grösseren Entfernung stossen sie einander ab, bei jeder kleineren Entfernung aber ziehen sie einander an.

Ueber die Wechselwirkung zwischen elektrisirten Kugeln hat Snow Harris (*W. Thomson, On the mathematical theory of electricity in Equilibrium. Philos. Magaz. 4. ser. Vol. VIII.*) Versuche angestellt. Derselbe bestimmte mit Hülfe einer gewöhnlichen Wage die Anziehung zwischen einer Kugel, welche isolirt war und mit der inneren Belegung einer geladenen Batterie in Verbindung stand, und einer gleich grossen, aber abgeleiteten Kugel. Für verschiedene Entfernungen beider Kugeln ergaben sich folgende, in Gran ausgedrückte Anziehungen:

S	K
2,3	15
2,5	8,25
2,8	4,6
3,0	3,5

Der Theorie gemäss hat man für die absolute Anziehung, da das elektrische Potential in der einen Kugel gleich Null war:

$$-\frac{G^2}{2}\cdot\frac{d\Sigma}{dS},$$

wo G das Potential in der isolirten Kugel bedeutet. Insofern nun letzteres, welches mit dem der inneren Belegung der Batterie zusammenfiel, merklich constant blieb, mussten sich die Kräfte, welche den verschiedenen Entfernungen entsprachen, wie die Zahlen 32917, 17432, 9174, 6592, oder wie die Zahlen 15, 7,94, 4,18, 3,00 verhalten. Die steigenden Differenzen der drei letzten Zahlen und der correspondirenden beobachteten Zahlen lassen sich nach Thomson aus dem Umstande erklären, dass neben den Kugeln auch noch andere bezüglich isolirte und abgeleitete Körper zur Wirkung kamen. Eine solche Störung musste sich

offenbar in gleichem Sinne äussern, wie eine Vergrösserung der Kugeln bei gleichbleibender Entfernung, d. h. es musste die Anziehung weniger rasch abnehmen, als die Theorie angiebt, wie solches wirklich der Fall war.

Die Kenntniss der Gesetze für die Wechselwirkung zweier Sphären macht es möglich, die Ladung einer Sphäre durch Anwendung der Drehwage auf absolutes Maass zurückzuführen. Es sei Q die zu bestimmende Ladung einer Sphäre. An dieser Sphäre werde die Standkugel einer Drehwage geladen. Aus den Dimensionen der erst erwähnten Kugel und der Standkugel kann nach dem Früheren die Ladung λQ, welche auf die Standkugel übergeht, bestimmt werden. Nachdem die Standkugel in das Elektrometer gebracht worden, die bewegliche Kugel, die ebenso gross wie jene sei, mit ihr in Berührung gebracht und elektrisirt worden, werde durch Torsion des Drahtes erzielt, dass der Wagebalken in einem bestimmten Azimuthe ins Gleichgewicht kommt. Die diesem Azimuthe entsprechende Entfernung der Kugeln der Drehwage sei S, alsdann hat man, da jetzt $Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2} \lambda Q$ ist, für die Abstossungskraft, die an jeder der Kugeln thätig ist:

$$K = -\frac{1}{4} \lambda^2 Q^2 \frac{d(\Sigma - \Sigma')^{-1}}{dS},$$

wenn, unter R den Radius einer der Kugeln verstanden, gesetzt wird:

$$\Sigma - \Sigma' = R \left\{ 1 - \frac{R}{S} + \frac{R^2}{S^2 - R^2} - \frac{R^3}{S^3 - 2R^2 S} \right.$$
$$\left. + \frac{R^4}{S^4 - 3R^2 S^2 + R^4} \cdots\cdots \right\}.$$

Indem wir den reciproken Werth dieses Ausdruckes nach steigenden Potenzen von $R:S$ entwickeln, die Derivation bilden und substituiren, ergiebt sich für eine Annäherung bis zur 5ten Potenz einschliesslich:

$$K = \frac{\lambda^2 Q^2}{4 S^2} \left(1 - 4 \frac{R^3}{S^3}\right).$$

Für das durch letztere Kraft erzeugte Drehungsmoment hat man:

$$\frac{\lambda^2 p}{4 S^2}\left(1 - 4\,\frac{R^3}{S^3}\right) Q^2 = \frac{\lambda^2 Q^2}{\sigma},$$

wenn p das Perpendikel ist, welches in der Horizontalebene von der Drehungsaxe auf die Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Kugeln herabgelassen wird.

Und wenn ferner τ das Torsionsmoment der Drehwage, θ aber die Torsion des Drahtes für den Fall des Gleichgewichtes bedeutet, so ist:

$$Q^2 = \frac{\sigma \tau}{\lambda^2}\,\theta.$$

Die Anwendung der letzteren Formel wollen wir an Daten erläutern, die einer Untersuchung von Weber und Kohlrausch über elektro-dynamische Maassbestimmungen entnommen sind. Der Radius der Kugel, deren Ladungen gemessen wurden, betrug 15,946 Centimeter; der Radius der Standkugel 1,1537; hiernach war (s. S. 85):

1. $\lambda = 0{,}0078752,\ Q - \lambda\, Q : \lambda\, Q = 1 : 0{,}0079377.$

Die Standkugel war um 9,353, die bewegliche Kugel um 6,17 Centimeter von der Drehaxe entfernt. Hieraus folgt, da den beiden Kugeln durch Torsion immer eine solche Stellung gegeben wurde, dass ihre Azimuthaldifferenz genau 90° betrug, $S = 11{,}205$, $p = 5{,}15025$. Endlich war $R = 1{,}1567$ zu setzen, indem letzteres das Mittel der sehr nahe gleichgrossen Kugeln des Elektrometers war. Aus obigen Daten folgt:

2. $\sigma = 97{,}942.$

Um das Torsionsmoment τ zu bestimmen wurde der Wagebalken entfernt, mittelst eines kleinen senkrechten Cylinders eine Kreisscheibe in ihrem Mittelpunkte horizontal an den Draht befestigt und die Schwingungsdauer bei dieser Belastung bestimmt. Der kleine Cylinder hatte einen Radius von 0,325 Centimeter, und wog 2,626 Gramme. Der Radius der Scheibe betrug 6,395 Centimeter, ihr Gewicht 191,1124 Gramme. Hiernach war das Trägheitsmoment der oscillirenden Masse:

$$J = 3908{,}03868.$$

Die Dauer einer ganzen Oscillation wurde gefunden:

$$D = 94{,}278.$$

Nun ist aber in Gemässheit der Gesetze für die verschwindend kleinen Torsionsoscillationen eines belasteten Drahtes:

$$\left(\frac{2\pi}{D}\right)^2 = \frac{\tau}{J},$$

woraus sich mittelst obiger Daten für das Torsionsmoment der Werth

$$17{,}358$$

berechnet. Durch Combination dieses Werthes mit dem durch einen zweiten Versuch gelieferten ergab sich:

$$3. \quad \tau \doteq 17{,}400.$$

Aus 1, 2 und 3 folgt jetzt endlich:

$$Q^2 = 27{,}4786 . 10^6 . \theta,$$

wo θ den Torsionsbogen im Kreise mit dem Radius Eins bedeutet.

Bei einem von den genannten Forschern angestellten Versuche betrug der Torsionswinkel 175,3 Minuten, mithin war:

$$\theta = 0{,}0509927,$$

und folglich:

$$Q = 1183{,}7.$$

Die Ladung der ersten Kugel enthielt also 1183,7mal dasjenige Quantum Elektricität, welches auf ein gleiches Quantum in der Entfernung eines Centimeters mit einer Kraft wirkt, die einem Gramme während einer Secunde die Geschwindigkeit von einem Centimeter ertheilen würde.

Litteratur. Poisson. Mémoire 1 et 2 sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. Mém. de la classe des scienc. mathém. et phys. de l'institut. Année 1811.

W. Thomson. On the mutual attraction or repulsion between two electrified spherical conductors. Philos. Mag. 4. ser. Vol. V, VI.

3. Elektrische Verstärkungsapparate. Das Princip der Erhaltung der Kraft auf den Hergang bei der Entladung eines Verstärkungs-Apparates angewandt. Bestimmung der Ladung eines Verstärkungs-Apparates nach absolutem Maasse.

In den Wirkungskreis eines isolirten, geladenen Leiters, von dem wir der Einfachheit wegen annehmen wollen, dass er von einer Revolutionsfläche begrenzt sei, werde ein zweiter mit der Erde in Verbindung stehender Leiter gebracht und auch dieser möge von einer Revolutionsfläche begrenzt und so gestellt werden, dass seine Axe mit der des ersten Leiters zusammenfällt.

Es leuchtet alsdann ein, dass die elektrische Wirkung zwischen den Conductoren strebt den einen dem anderen in der Richtung der gemeinsamen Axe zu nähern, indem der eine allenthalben mit positiver, der andere mit negativer Elektricität bedeckt ist. Wir schliessen hieraus, dass, wenn der eine Conductor dem anderen in der genannten Richtung genähert wird, der Werth des Gesammtpotentiales im Innern des isolirten Conductors an Grösse abnimmt. Wegen der Art der Wirkung muss nämlich bei einer Annäherung der Werth des Potentials sämmtlicher Elektricität auf sich selbst abnehmen. Dieser stellt sich aber dar durch das Product aus der Ladung des isolirten Conductors und dem in letzterem auftretenden Potentialwerthe, indem das Potential im abgeleiteten Conductor verschwindet. Und da die Ladung des isolirten Conductors constant bleibt, so muss also das Potential der Elektricität auf sich selbst zu- oder abnehmen, je nachdem das Gesammtpotential im isolirten Conductor zu- oder abnimmt.

Auf den soeben erörterten Verhältnissen bei zwei Conductoren beruht die Wirkung der zur Verstärkung und Ansammlung der Elektricität dienenden Apparate, des Condensators, der Franklin'schen Tafel, der Leydener Flasche und der elektri-

schen Batterie. Es bestehen diese Apparate aus zwei einander nahe gebrachten Leitern, von welchen der eine mit einer Elektricitätsquelle in Verbindung gebracht wird, während der andere abgeleitet wird. Aus einer Elektricitätsquelle wird der Uebergang der Elektricität auf den zu ladenden Leiter aufhören, sobald die scheidende Kraft der Quelle nicht mehr im Stande ist der Abstossung das Gleichgewicht zu halten, welche die aufgehäufte Elektricität von der ganzen elektrischen Ladung erleidet. In dem Maasse also, als das Potential der auf beiden Leitern aufgehäuften Elektricität kleiner ist, wird auch die Quantität der Ladung des isolirten Conductors für den Zustand, wo die Thätigkeit der Quelle aufhören muss, grösser sein. Jenes Potential wird aber, wie wir sahen, durch die Gegenwart des abgeleiteten Leiters herabgedrückt, so dass also eben dadurch der isolirte Leiter ein grösseres Quantum aufnehmen muss, damit das Gesammtpotential den Werth annimmt, wobei die Aufnahme aus der Quelle aufhört. Die gegenseitige Influenz der beiden Conductoren wird unter übrigens gleichen Umständen dadurch wesentlich verstärkt, dass sie mit möglichst grossen Theilen ihrer Oberfläche möglichst nahe gebracht werden. In der Regel treten die beiden Conductoren als die eine und andere metallische Belegung einer gut isolirenden möglichst dünnen Platte oder als äussere und innere Belegung eines gut isolirenden flaschenförmigen Gefässes auf.

Als ein sehr einfaches Beispiel von einem elektrischen Verstärkungsapparat wollen wir hier eine Leydener Flasche von sphärischer Gestalt betrachten. Eine isolirende dünne Kugelschale, die mit einer kleinen etwa kreisförmigen Oeffnung versehen ist, sei auf ihrer ganzen äusseren und ihrer ganzen inneren Fläche mit einem verschwindend dünnen Metallüberzuge versehen. Durch einen sehr dünnen Draht, welcher durch die Oeffnung hindurchgeht, werde die innere Belegung der Flasche mit einer Elektricitätsquelle in Verbindung gesetzt, deren Thätigkeit aufhöre, sobald das Potential der inneren Belegung den Werth c erreicht. Die äussere Belegung der Flasche werde durch einen ebenfalls sehr dünnen Draht abgeleitet. Welches wird unter diesen Umständen die Grösse der Ladung sein, welche von der Flasche aufgenommen wird?

Man sieht leicht ein, dass, wenn die Oberfläche der Oeffnung gegen die ganze Oberfläche der Flasche vernachlässigt werden kann, die Ladung der einen und anderen Belegung so berechnet werden darf, als ob die äussere und innere Fläche der Flasche gleichförmig mit Elektricität belegt sei. Bezeichnen wir daher die Ladung der inneren und äusseren Belegung durch Q und Q_0, den äusseren Radius der Flasche durch R und ihre Dicke durch θ, so hat man:

$$\frac{Q}{R-\theta} + \frac{Q_0}{R} = c, \quad \frac{Q}{R} + \frac{Q_0}{R} = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$Q = -\,Q_0 = \frac{R(R-\theta)\,c}{\theta}.$$

Die Verstärkung, welche hier durch die äussere Belegung bewirkt wird, hat den Quotienten $R:\theta$ zum Maasse, da die innere Belegung für sich allein nur die Quantität $(R-\theta)\,c$ aufnehmen würde. Man bemerke ferner, dass die Ladungen der beiden Belegungen entgegengesetzt gleich sind, sowie dass das Potential auf der inneren Belegung mit der Quantität der Ladung und in erster Annäherung mit der Dicke des Zwischenkörpers proportional ist. Analoges gilt, wie wir jetzt zeigen wollen, für jede beliebig gestaltete Flasche, wofern nur der Zwischenkörper sehr dünn ist und keine von den Belegungen über die andere hinaus ragt.

Es sei Q die Ladung der einen, wir wollen sagen der inneren Belegung einer Flasche, auf deren äusserer Belegung das Potential der Gesammtladung verschwindet. Sie kann in zwei Theile q und q_0 zerlegt werden, von welchen der erste so über die innere Belegung ausgebreitet ist, dass er für sich allein im Gleichgewicht ist und sein inneres Potential mit dem Werthe des Gesammtpotentiales auf der genannten Belegung zusammenfällt. Der zweite Theil q_0 ist alsdann die Ladung, welche auf der inneren Belegung, wenn sie abgeleitet wäre, von der Ladung der äusseren Belegung inducirt würde; letztere Ladung wollen wir durch $-\,Q_0$ bezeichnen. Ferner sei A_1 und A_1' das äussere und innere Potential für die innere Belegung, wenn solche für sich allein genommen mit der Quantität Eins geladen wird; die

analogen Grössen für die äussere Belegung seien A_2 und A_2'. Man hat alsdann nach einem früheren Satze:

$$Q_0 = \int \frac{A_2}{A_2'}\, d\, Q,\ q_0 = \int \frac{A_1}{A_1'}\, d\, Q_0.$$

Wenn nun der Zwischenkörper verschwindend dünn ist, und keine der Belegungen über die andere hinausragt, so kann man innerhalb der Grenzen der obigen Integrale setzen:

$$A_1 = A_1' - 4\pi\varrho_1\theta,\ A_2 = A_2' - 4\pi\varrho_2\theta,$$

wo θ die Dicke des Zwischenkörpers, ϱ_1 und ϱ_2 die den Potentialen A_1 und A_2 entsprechenden Dichtigkeiten auf den einander zugekehrten Seiten der Belegungen bedeuten. Hiernach kommt:

$$Q_0 = Q - \frac{4\pi}{A_2'} \int \varrho_2\theta\, d\, Q,\ q_0 = Q_0 - \frac{4\pi}{A_1'} \int \varrho_1\theta\, d\, Q_0$$

$$= Q - \frac{4\pi}{A_1'} \int \varrho_1\theta\, d\, Q_0 - \frac{4\pi}{A_2'} \int \varrho_2\theta\, d\, Q.$$

Für das Potential auf der inneren Belegung erhält man:

$$q A_1' = (Q - q_0) A_1' = \left(\frac{4\pi}{A_1'} \int \varrho_1\theta\, d\, Q_0 + \frac{4\pi}{A_2'} \int \varrho_2\theta\, d\, Q\right) A_1'.$$

Aus den letzten Formeln ersehen wir aber, dass bei einer Flasche mit sehr dünnem Zwischenkörper in erster Annäherung die absoluten Werthe der Ladungen Q und $- Q_0$ einander gleich gesetzt werden können und dass das Potential auf der inneren Belegung durch $a\, Q$ dargestellt werden kann, wenn a eine von der Beschaffenheit der Flasche abhängige Constante bedeutet, welche von derselben Ordnung wie die Dicke des Zwischenkörpers ist.

Auf den oben betrachteten Fall, wo das Gesammtpotential auf der einen Belegung verschwindet, und den Fall, wo in beiden Belegungen ein und derselbe Potentialwerth auftritt, lässt sich, wie man leicht einsehen wird, eine jede Ladungsweise einer Leydener Flasche zurückführen.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der elektrischen Batterien. Indem man eine Reihe von Leydener Flaschen so vereinigt, dass die gleichnamigen Belegungen etwa mit Hülfe von sehr dünnen Drähten in leitende Verbindung treten, erhält man die gewöhnliche elektrische Batterie.

Das Potential der Gesammtladung einer solchen Batterie

muss sowohl auf der einen wie auch auf der anderen Belegung einen constanten Werth aufweisen. Wenn ins Besondere eine Belegung mit der Erde in Verbindung steht, so verschwindet auf ihr das Potential. In diesem Falle, welcher bei der gewöhnlichen Art die Batterie zu laden stattfindet, kann dem Vorhergehenden zufolge das Gesammtpotential in der einzelnen Flasche dem Potential ihrer Ladung in erster Annäherung gleich gesetzt werden. Hieraus folgt, dass die Ladung der einzelnen Flasche nahezu in gleicher Weise angeordnet ist, wie wenn die Flasche für sich allein stände. Es sei Q die Elektricitätsmenge, welche einer Belegung, wir wollen sagen der inneren zugeführt wird, während die andere abgeleitet ist. Die Ladungen der inneren Belegungen der einzelnen Flaschen seien $q_1, q_2, q_3 \cdots$ Ferner seien $a_1, a_2, a_3 \cdots$ die Potentiale auf den inneren Belegungen der einzelnen getrennten Flaschen, wenn solche, während die äusseren Belegungen abgeleitet sind, mit dem Quantum Eins geladen werden. Alsdann hat man, wenn noch das Potential auf der inneren Belegung der Batterie durch c bezeichnet wird:

$$c = a_1 q_1 = a_2 q_2 = a_3 q_3 = \cdots, \quad Q = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots$$

Für eine Batterie, die aus v gleich gestalteten und gleich grossen Flaschen besteht, ergiebt sich hieraus:

$$c = \frac{a\,Q}{v}.$$

Unter der Franklin'schen oder Cascadenbatterie versteht man ein System von Flaschen, welche so verbunden sind, dass von den Belegungen einer Flasche die eine mit der ungleichnamigen Belegung der vorhergehenden Flasche, die andere mit der ungleichnamigen Belegung der folgenden Flasche in leitender Verbindung steht. Unverbunden bleibt also eine Belegung der ersten Flasche des Systemes und die ungleichnamige Belegung der letzten Flasche. Die Ladung wird bewirkt, indem von den letzt genannten Belegungen die eine mit der Elektricitätsquelle, die andere mit der Erde in Verbindung gesetzt wird. Wir wollen unsere Betrachtungen auf den Fall beschränken, wo die Batterie aus lauter gleichen Flaschen besteht. Die äussere Belegung der ersten Flasche sei abgeleitet und enthalte das elektrische Quantum $-Q$. Alsdann ist die Ladung der inneren Belegung in erster Annäherung gleich Q zu setzen und auf

dieser Belegung herrscht das Potential $a\,Q$, wenn a das Potential ist, welches der Ladung Eins entspricht. Dasselbe Potential muss auf der äusseren Belegung der zweiten Flasche auftreten und die Ladung dieser Belegung ist offenbar $-Q$. Was die Anordnung der Ladung in der zweiten Flasche betrifft, so kann diese Ladung als zusammengesetzt betrachtet werden aus einer Ladung, welche für sich auf der äusseren Belegung das Potential Null erzeugt, und einer Ladung, welche in beiden Belegungen ein und dasselbe Potential hervorruft. Die Theile der ersten Ladung, welche auf der inneren und äusseren Belegung auftreten, seien in erster Annäherung q und $-q$. Die Theile der zweiten Ladung sind in erster Annäherung einander gleich und seien q'. Wenn wir alsdann noch das Potential, welches auftritt, wenn beiden Belegungen einer Flasche die Quantität Eins mitgetheilt wird, und welches in erster Annäherung für beide Belegungen dasselbe ist, durch b bezeichnen, so kommt nach dem Obigen:

$$b\,q' = a\,Q,\ q - q' = Q.$$

Hiernach erlangt das Potential auf der inneren Belegung der zweiten Flasche den Werth:

$$a\,q + b\,q' = \left(2\,a + \frac{a^2}{b}\right) Q,$$

oder in erster Annäherung den Werth $2\,a\,Q$.

Indem man von der zweiten Flasche zur dritten u. s. f. in gleicher Weise wie von der ersten zur zweiten fortschreitet, findet man, dass die Ladungen der inneren Belegungen gleich Q, die der äusseren gleich $-Q$ sind, und dass das Potential auf den auf einander folgenden äusseren Belegungen die Werthe $0,\ a\,Q,\ 2\,a\,Q,\ 3\,a\,Q \cdots$, auf den inneren Belegungen die Werthe $a\,Q,\ 2\,a\,Q,\ 3\,a\,Q,\ 4\,a\,Q \cdots$ aufweist, wenn Q die der inneren Belegung der letzten Flasche zugeführte Elektricitätsmenge ist.

Der Hergang bei der Entladung einer elektrischen Batterie ist jedenfalls ein sehr verwickelter. Wie derselbe aber auch verlaufen möge, die lebendige Kraft, welche bei der Entladung erzeugt wird, kommt in Gemässheit des Principes von der Erhaltung der Kraft dem Doppelten der Arbeit gleich, welche von den thätigen Kräften geleistet wird. Bezeichnen wir die erzeugte lebendige Kraft, vermindert um das Doppelte der Ar-

beit der nicht elektrischen Kräfte als den Effect, welchen die elektrischen Kräfte hervorbringen, so ist also jener Effect gleich dem Doppelten der Arbeit der elektrischen Kräfte und mithin auch gleich der negativen Aenderung des Potentiales der Elektricität in Bezug auf sich selbst. Als ein Theil des genannten Effectes ist die lebendige Kraft der Wärme — letztere als eine Molekularbewegung aufgefasst — anzusehen, welche durch die Entladung hervorgerufen wird, und es liegt nahe anzunehmen, dass die lebendige Kraft der Wärme, welche bei der Entladung einer und derselben Batterie in einem bestimmten Theile des Schliessungsbogens entwickelt wird, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen in einem constanten Verhältnisse zu dem ganzen Effecte stehe, wofern nur der Schliessungsbogen ungeändert bleibt. Wenn aber solches der Fall ist, so muss die Erwärmung eines bestimmten Theiles des Schliessungsbogens einer und derselben Batterie bei der Entladung mit der Verminderung des Potentiales der Elektricität auf sich selbst proportional sein, indem die einem Wärmequantum entsprechende lebendige Kraft mit dem Quantum proportional zu setzen ist. Diese Folgerung steht mit den Resultaten im Einklang, zu welchen Riess (die Lehre von der Reibungselektricität) bei seinen Untersuchungen über die Erwärmung bei der Entladung einer Batterie gelangt ist. Bevor wir einige Belege hierfür beibringen, wollen wir noch kurz andeuten, wie Riess bei den betreffenden Versuchen verfuhr. In den Schliessungsbogen der Batterie wurde ein elektrisches Luftthermometer eingeschaltet. Der Platindraht des Thermometers bildete den Theil des Schliessungsbogens, dessen Erwärmung ermittelt wurde, und zwar war jene unter übrigens gleichen Umständen der Senkung der Flüssigkeit in der Thermometerröhre proportional zu setzen, welche bei der Entladung eintrat. Um die Quantität der Ladung zu bestimmen wurde die äussere Belegung der isolirten Batterie mit der inneren Belegung einer Lane'schen Flasche in Verbindung gesetzt, deren äussere Belegung abgeleitet war. Wurde nun die innere Belegung der Batterie geladen, so entlud sich die Maassflasche in aufeinander folgenden Epochen und die Anzahl dieser Entladungen konnte der zugeführten Elektricität annähernd proportional gesetzt werden.

Die erste Versuchsreihe, deren wir hier gedenken wollen, bezieht sich auf die vollständige Entladung einer gewöhnlichen Batterie. Der absolute Werth der Aenderung, welche hier das Potential der Ladung auf sich selbst bei der Entladung erleidet, kommt dem Werthe jenes Potentiales vor der Entladung gleich, weil der Werth des letzteren nach der Entladung gegen den erst genannten Werth verschwindet. Betrachten wir nämlich zunächst eine einzelne Flasche, so haben wir für das fragliche Potential vor der Entladung, wenn wir die früheren Bezeichnungen beibehalten:

$$a\,Q^2 = Q \cdot q\,A_1' = A_1'\,Q\left(\frac{4\pi}{A_1'}\int \varrho_1\,\theta\,d\,Q_0 + \frac{4\pi}{A_2'}\int \varrho_2\,\theta\,d\,Q\right).$$

Andererseits haben wir für das Potential nach der Entladung wie leicht einzusehen:

$$B'(Q - Q_0)^2 = B'\left(\frac{4\pi}{A_2'}\int \varrho_2\,\theta\,d\,Q\right)^2,$$

wenn B' das innere Potential der Ladung Eins für die verbundenen Belegungen bedeutet. Wenn aber der Zwischenkörper sehr dünn ist, so kann offenbar der letzte Potentialwerth gegen den ersten vernachlässigt werden. Man bemerke auch noch, dass in diesem Falle die Grössen A_1', A_2' und B' nahe gleich sind. Was so eben für die Flasche erwiesen wurde gilt auch für die Batterie, und deshalb hat man für die Depression D des elektrischen Thermometers bei der Entladung einer Batterie, die aus ν gleichen Flaschen besteht und mit der Elektricitätsmenge Q geladen ist:

$$D = \frac{\lambda\,Q^2}{\nu},$$

wo der Coefficient λ von Q und ν unabhängig ist.

Die beiden folgenden Tabellen enthalten einige der von Riess gewonnenen Resultate, welche die letzte Formel bestätigen. Die erste Tabelle bezieht sich auf eine Batterie aus fünf Flaschen, welche in verschiedener Weise geladen wurde. Die zweite Tabelle bezieht sich auf Versuche, wobei die Anzahl der Batterieflaschen verändert, jedesmal aber der Batterie eine constante Ladung, welche sechs Entladungen der Maassflasche entsprach, mitgetheilt wurde. Bei der Berechnung der Depression,

welche in Linien der Thermometerskala ausgedrückt ist, wurde für die Constante λ der Werth 0,88 angenommen.

Erste Tabelle.

	Q	3	4	5	6	7	8	9	10
D	beobachtet	1,5	3,0	4,5	6,5	8,8	11,3	14,3	16,7
	berechnet	1,6	2,8	4,4	6,3	8,6	11,3	14,3	17,6

Zweite Tabelle.

	v	2	3	4	5	6
D	beobachtet	13,4	9,7	7,3	6,5	5,5
	berechnet	15,8	10,6	7,9	6,3	5,5

Eine geladene Batterie, deren äussere Belegung mit der Erde in Verbindung steht, wird dadurch theilweise entladen, dass man ihre isolirte Belegung mit der inneren Belegung einer zweiten ursprünglich nicht geladenen Batterie, deren äussere Belegung abgeleitet ist, in Verbindung setzt. Man hat hierdurch eine grössere Batterie hergestellt, deren Ladung gleich ist der ursprünglichen Ladung der ersten Theilbatterie. Zugleich wird das Potential der Elektricität auf sich selbst vermindert und muss folglich eine Wärmeentwickelung eintreten. Es sei a_1 das Potential einer Flasche der ersten Batterie, wenn jene mit der Quantität Eins geladen ist, und a_2 dieselbe Grösse für eine Flasche der zweiten Batterie. Das Potential der Ladung Q der ersten Batterie auf sich selbst ist dann, wenn letztere aus v_1 Flaschen besteht:

$$1. \quad \frac{a_1 Q^2}{v_1}.$$

Wird ferner durch q_1 und q_2 die Ladung einer Flasche der ersten und zweiten Batterie bezeichnet, nachdem diese mit einander verbunden worden, so ist, unter v_2 die Anzahl der Flaschen in der zweiten Batterie verstanden:

$$a_1 q_1 = a_2 q_2, \; v_1 q_1 + v_2 q_2 = Q,$$

woraus folgt:

$$q_1 = \frac{a_2 Q}{a_1 v_2 + a_2 v_1}, \; q_2 = \frac{a_1 Q}{a_1 v_2 + a_2 v_1}.$$

Für das Potential der Elektricität auf sich selbst nach Herstellung der Verbindung kommt also:

$$2. \quad \frac{a_1 a_2 Q^2}{a_1 \nu_2 + a_2 \nu_1}.$$

Aus 1 und 2 findet man für die durch die Umladung bedingte Verminderung des Potentiales der Elektricität auf sich selbst:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \cdot \frac{a_1^2}{a_1 \nu_2 + a_2 \nu_1} \cdot Q^2,$$

und hieraus ergiebt sich für die Depression, welche in einen eingeschalteten elektrischen Thermometer bei der Entladung in Folge der Erwärmung eintritt:

$$D = \frac{\lambda Q^2}{\nu_1 \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{\nu_1}{\nu_2}\right)},$$

wo λ von den Grössen ν_1, ν_2, Q unabhängig ist.

Durch folgende von Riess gewonnene Resultate wird die letzte Formel vollkommen bestätigt. Bei der Berechnung der Depression ist $a_1 : a_2 = 0{,}577$, $\lambda = 0{,}649$ angenommen.

ν_1	ν_2	Q	D		ν_1	ν_2	Q	D		ν_1	ν_2	Q	D	
			beob.	ber.				beob.	ber.				beob.	ber.
7	5	12	7	6,8	5	5	14	15,3	16,1	3	3	10	13,3	13,7
"	"	14	9	9,2	3	5	6	6,6	6,6	"	"	12	19,3	19,7
"	"	16	12	12	"	"	8	11,7	11,7	3	1	12	9,3	8,7
5	5	10	8,5	8,2	"	"	10	17,2	18,3	"	"	14	12,3	11,9
"	"	12	11,4	11,8	3	3	8	9,5	8,8	"	"	16	15,7	15,4

Die dritte Reihe der von Riess ausgeführten Versuche, welche hier erwähnt werden soll, bezieht sich auf ein System von zwei Batterien mit gleichen Flaschen, welche nach Art zweier Elemente einer Franklin'schen Batterie verbunden sind. Es sei ν_1 die Anzahl der Flaschen in der einen, ν_2 die in der anderen Batterie und Q die zugeführte Ladung. Durch analoge Betrachtungen, wie wir sie bei der Besprechung der Franklin'schen Batterie angestellt haben, ergiebt sich alsdann, dass auf den auf einander folgenden Belegungen das Potential die Werthe

$$0, \frac{aQ}{\nu_1}, \frac{aQ}{\nu_1}, \frac{aQ}{\nu_1} + \frac{aQ}{\nu_2}$$

aufweist, und dass die entsprechenden Ladungen

$$- Q, Q, - Q, Q$$

sind. Hiernach ist das Potential der Elektricität auf sich selbst gleich

$$a Q^2 \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}\right);$$

folglich hat man:

$$D = \lambda Q^2 \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}\right),$$

wo λ von Q, ν_1 und ν_2 unabhängig ist.

Aus der folgenden Tabelle erhellt die Uebereinstimmung zwischen der letzten Formel und der Beobachtung. Die mitgetheilten Erwärmungen wurden durch gleich grosse Ladungen erhalten. Bei der Berechnung der Depression ist $\lambda = 12{,}4$ angenommen. Die Zahl ν_1 bezieht sich auf die direct geladene Theilbatterie.

ν_1	1	1	1	1	1	2	3	4
ν_2	1	2	3	4	1	1	1	1
D beobachtet	23,9	18,7	17,1	16,3	24,0	18,3	16,5	15,7
D berechnet	24,8	18,6	16,5	15,5	24,8	18,6	16,5	15,5

Die Aequivalenz zwischen dem Effecte, welcher bei der Entladung hervorgebracht wird, und der doppelten Arbeit, welche von den elektrischen Spannkräften geleistet wird, sowie der Satz, dass die auftretende Wärme als ein Theil jenes Effectes zu betrachten ist, werden auch noch durch andere von Riess gemachte Beobachtungen erwiesen. Es stellt sich nämlich die Erwärmung eines bestimmten Theiles des Schliessungsbogens unter übrigens gleichen Umständen um so geringer heraus, je grösser der Effect ist, welcher an einer anderen Stelle jenes Bogens unter Anderem durch Durchbohrung eingeschalteter Körper, durch Erschütterung und Biegung dünner in den Schliessungsbogen gebrachter Drähte hervorgebracht wird. Auch die Versuche, welche Masson (*Etudes de photométrie électrique. Annal. de chim. et de phys. 3me série T. XIV.*) über die Licht-Intensität des elektrischen Funkens anstellte, welcher bei der Entladung einer Franklin'schen Tafel auftritt, dienen als Belege für die oben aufgestellten Beziehungen. Masson fand, dass die Inten-

sität des Entladungsfunkens in geradem Verhältnisse mit der Oberfläche einer Belegung und mit dem Quadrate der Schlagweite, in umgekehrtem Verhältnisse aber mit der Dicke des Zwischenkörpers steht. Die Schlagweite, welche mittelst eines Funkenmikrometers ermittelt wurde, kann innerhalb gewisser Grenzen mit der Differenz der Werthe, welche das Potential auf den beiden Belegungen annimmt, proportional gesetzt werden. Hiernach ist dann die Intensität des Funkens proportional mit dem Ausdrucke

$$\frac{c^2 O}{\theta},$$

wenn die eine Belegung bei der Ladung der Tafel leitend berührt wurde, und wenn c das Potential auf der anderen Belegung, O den Flächeninhalt einer Belegung und θ die Dicke des Zwischenkörpers bedeutet.

Um den Zusammenhang obigen Ergebnisses mit der Theorie zu erkennen, denken wir uns zunächst die Belegungen mit entgegengesetzt gleichen Elektricitätsmengen Q, $-Q$ geladen. Diese ordnen sich offenbar in Bezug auf die Mittelebene der Tafel symmetrisch an und die Summe ihrer Potentiale V_1, V_2 nimmt in den beiden Belegungen entgegengesetzt gleiche Werthe $\frac{c}{2}$, $-\frac{c}{2}$ an. Für die Dichtigkeit auf der äusseren Fläche der ersten Belegung, auf welche sich Q, V_1, $\frac{c}{2}$ beziehen, hat man:

$$4\pi\varrho = -\left(\frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_2}{dn}\right).$$

Es ist aber, wenn die Dicke des Zwischenkörpers verschwindend klein ist, für jeden in endlicher Entfernung vom Rande gelegenen Punkt der gedachten Fläche

$$\frac{dV_2}{dn} = -\frac{dV_1}{dn} - \frac{d^2V_1}{dn^2}\theta - \cdots,$$

folglich kommt:

$$4\pi\varrho = \frac{d^2V_1}{dn^2}\theta + \cdots$$

In erster Annäherung können also die Dichtigkeiten auf den äusseren Flächen der Belegungen vernachlässigt werden.

Für jeden Punkt auf der inneren Fläche der betrachteten

Belegung, welcher in endlicher Entfernung vom Rande liegt, hat man ferner:

$$-\frac{c}{2} = \frac{c}{2} + \frac{d(V_1 + V_2)}{dn}\,\theta + \cdots,$$

und da überdies:

$$\frac{d(V_1 + V_2)}{dn} = -\,4\pi\varrho,$$

so ist in erster Annäherung:

$$c = 4\pi\varrho\,\theta.$$

Bemerkt man jetzt, dass die Ladung, welche erforderlich ist, um den Potentialwerth in der einen Belegung auf c, in der anderen auf 0 zu bringen, gegen die oben bestimmte Ladung in erster Annäherung vernachlässigt werden kann, so ergiebt sich aus dem Obigen in dem Falle, wo jene Werthe auftreten, für das Potential der Ladung auf sich selbst:

$$c\,Q = c\,O\varrho = \frac{c^2\,O}{4\pi\theta}.$$

Diesem Ergebniss zufolge ist die Intensität des Entladungsfunkens mit der Verminderung des Potentiales der ins Spiel tretenden Elektricität auf sich selbst proportional, was insofern mit der Theorie übereinstimmt, als die Intensität des Lichtes wie die Wärmemenge mit der lebendigen Kraft der betreffenden Bewegung proportional ist.

Wir haben oben eine von Riess angewandte Methode zur Bestimmung der Ladung eines Verstärkungsapparates kennen gelernt; es möge aber hier auch noch eine zweite Methode erwähnt werden, welche von Weber und Kohlrausch (Elektrodynamische Maassbestimmungen. Abhandl. d. K. Sächs. Gesellschaft d. Wissensch. V.) angewandt wurde, um jene Grösse auf absolutes Maass zurückzuführen.

Dieses Verfahren besteht darin, dass man erstens das Verhältniss ermittelt, in welchem die Ladung des Verstärkungsapparates vermindert wird, wenn eine isolirte Kugel von bestimmter Grösse mit der einen Belegung an einer bestimmten Stelle in Berührung gebracht wird, während die andere Belegung abgeleitet ist. Ausserdem hat man zweitens auf die früher erörterte Weise die auf die Hülfskugel übergegangene Elektricitätsmenge nach absolutem Maasse zu bestimmen. Aus den

beiden so gewonnenen Grössen ist aber offenbar ein Schluss auf die absolute Quantität der Ladung des Verstärkungsapparates gestattet.

Das Verhältniss, in welchem die Ladung des Verstärkungsapparates, einer Leydener Flasche, bei der Berührung mit der Kugel vermindert wurde, bestimmten Weber und Kohlrausch wie folgt: Die innere isolirte Belegung der Flasche wurde durch einen Draht, von dessen Enden das eine in einer kleinen Vertiefung am Knopfe der Flasche lag und mittelst eines seidenen Fadens aus dieser Vertiefung herausgehoben werden konnte, mit einem Sinuselektrometer in Verbindung gesetzt. Es wurden die den auf einander folgenden Zeiten t_1, t_2 entsprechenden Ablenkungen a_1, a_2 des Elektrometers beobachtet. Sodann wurde der Leitungsdraht mittelst des seidenen Fadens ausgehoben, die Hülfskugel mit dem Knopfe der Flasche berührt und die Zeit t der Berührung bestimmt. Nachdem die Standkugel einer Drehwage an der Hülfskugel geladen worden, um die Ladung der letzteren zu finden, und nachdem die Verbindung der Flasche und des Sinuselektrometers wieder hergestellt war, wurden endlich noch die den auf einander folgenden Zeitpunkten t_3, t_4 entsprechenden Ablenkungen a_3, a_4 beobachtet. Alle diese Operationen aber nahmen meistens weniger als 5 Minuten in Anspruch.

Aus den so gewonnenen Resultaten lässt sich nun leicht das fragliche Verhältniss finden. Für kleinere Zeiträume, wie sie hier in Betracht kommen, darf man annehmen, dass der Verlust einer elektrischen Ladung mit der Zeit proportional ist. Wenn wir also durch ϱ und ϱ' die elektrische Dichtigkeit in irgend einem bestimmten Punkte der inneren Belegung unmittelbar vor und unmittelbar nach der Berührung und durch x eine gewisse, von der Lage jenes Punktes und von der Einrichtung des Sinuselektrometers abhängige Constante bezeichnen, so ist:

$$x\varrho = \sqrt{\sin a_2} - \frac{t - t_2}{t_2 - t_1} \left(\sqrt{\sin a_1} - \sqrt{\sin a_2}\right),$$

$$x\varrho' = \sqrt{\sin a_3} + \frac{t_3 - t}{t_4 - t_3} \left(\sqrt{\sin a_3} - \sqrt{\sin a_4}\right).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{t_4 - t_3}{t_2 - t_1} \cdot \frac{(t - t_1)\sqrt{\sin a_2} - (t - t_2)\sqrt{\sin a_1}}{(t_4 - t)\sqrt{\sin a_3} - (t_3 - t)\sqrt{\sin a_4}}.$$

Nachdem für einen Verstärkungsapparat das Verhältniss $\frac{\varrho}{\varrho'}$ auf die angegebene Weise bestimmt worden ist, muss man noch, um die absolute Quantität einer speciellen Ladung zu finden, die absolute Quantität der Elektricität bestimmen, welche bei der Berührung mit der Hülfskugel auf diese übergeht. Bezeichnen wir dieselbe für den Zeitpunkt der Berührung durch Q, so hat man für die absolute Quantität der Ladung des Verstärkungsapparates unmittelbar nach der Berührung:

$$\frac{Q}{\frac{\varrho}{\varrho'} - 1}.$$

Bei einem Versuche, welchen Weber und Kohlrausch zur Ermittelung von $\frac{\varrho}{\varrho'}$ anstellten, ergaben sich folgende Resultate:

Zeit.	Ablenkung der Elektrometernadel.
9^h 40′ 7″	46° 30,5′
41. 57	44. 9,0
42. 0	Einmalige Berührung.
42. 23	40. 23,9
44. 0	39. 10,5

Hieraus berechnet sich für das Verhältniss $\frac{\varrho}{\varrho'}$ mittelst der oben aufgeführten Formel der Werth 1,0330. Als Mittel aus einer grösseren Anzahl von Beobachtungen fanden Weber und Kohlrausch den Werth 1,03276. Dieselben Experimentatoren gewannen für eine specielle Ladung der Leydener Flasche bei Bestimmung der von der Hülfskugel aufgenommenen Elektricität diejenigen Daten, welche wir früher bei Erörterung der gegenseitigen Influenz zweier sphärischer Conductoren beispielshalber erwähnten. Aus ihnen ergab sich für die absolute Quantität der auf der Hülfskugel befindlichen Elektricität der Werth

1183,7. Hiernach enthielt die Ladung der Leydener Flasche unmittelbar nach der Berührung 36132 der von uns gewählten Einheiten.

Wenn man einen Verstärkungsapparat, dessen Ladung wie angegeben bestimmt worden ist, entladet, so erreichen die beiden entgegengesetzt gleichen Elektricitätsmengen, welche sich unmittelbar nach der Schliessung des Leitungsbogens neutralisiren, im Allgemeinen nicht den ganzen Betrag der bestimmten Quantität. Während der Zeit nämlich, welche von dem Momente der Berührung mit der Hülfskugel bis zur Entladung verstreicht, erleidet derjenige Theil der Ladung auf der inneren Belegung, welcher unmittelbar nach der Entladung durch ein entgegengesetzt gleiches Quantum auf der äusseren Belegung neutralisirt werden kann, einen gewissen Verlust theils und hauptsächlich durch die Abgabe an die Luft, theils wegen der Bildung des sogenannten Rückstandes. Indem wir den Leser hinsichtlich der Bestimmung dieses Verlustes auf die citirte Originalabhandlung verweisen, bemerken wir noch, dass die Entstehung des Rückstandes zu einer Gruppe von elektrischen Erscheinungen gehört, welche bei unvollkommen leitenden Körpern beobachtet werden und auf einer mit der magnetischen analogen Induction zu beruhen scheinen.

Litteratur: Helmholtz, Ueber die Erhaltung der Kraft. 1847.
Clausius, Ueber das mechanische Aequivalent einer elektrischen Entladung und die dabei stattfindende Erwärmung des Leitungsdrahtes. — Pogg. Annal. Bd. LXXXVI.

MAGNETISMUS.

MAGNETISMUS.

I.

GRUNDLAGEN DER MATHEMATISCHEN THEORIE DES MAGNETISMUS.

Für die Entwicklungsgeschichte der mathematischen Theorie des Magnetismus bildete den Ausgangspunkt die Annahme zweier imponderablen Fluida, eines nördlich und eines südlich magnetischen Fluidums, über deren Wirkungsweise dieselben Unterstellungen wie über die der elektrischen Fluida gemacht werden. Während aber die elektrischen Fluida vollständig von einander getrennt werden können, musste bei dem Magnetismus angenommen werden, dass er durch Scheidung der magnetischen Fluida in den kleinsten Theilchen der Körper hervorgerufen werde, und dass die geschiedenen Flüssigkeiten nicht von einem Theilchen zum anderen übergehen können. Ein magnetisch erregter Körper verhält sich dieser von Coulomb herrührenden Hypothese zufolge analog, wie ein Haufwerk elektrisch erregter leitender Moleküle, die von einander durch ein isolirendes Mittel getrennt sind.

Nach einer von Ampère aufgestellten Hypothese ist die Wechselwirkung zwischen magnetischen Körpern auf die Wechselwirkung zwischen linearen elektrischen Strömen mit sehr kleinen ebenen Bahnen, die in den kleinsten Theilchen der Körper kreisen, den sogenannten Molekular- oder Elementarströmen, zurückzuführen. Nun lehrt aber die Elektrodynamik, dass zur Bestimmung der Wechselwirkung solcher Ströme der einzelne Strom ersetzt werden kann durch zwei entgegengesetzt gleiche Quanta magnetischer Flüssigkeit, die in zwei der Stromfläche unendlich nahen Punkten concentrirt sind. Wenn man also auch die Ampère'sche Hypothese adoptirt, so kann man

sich doch der Vorstellung von magnetischen Flüssigkeiten als einer Hülfsvorstellung bedienen, ohne dadurch mit jener in Collision zu gerathen.

In der Coulomb'schen Hypothese wird die Entstehung des Magnetismus in der wirklichen Scheidung der magnetischen Flüssigkeiten gesucht. Dem entspricht, bei der Annahme von Molekularströmen die Entstehung des Magnetismus in der Erzeugung von Molekularströmen zu suchen. Beiden Anschauungen hat man zwei andere entgegengestellt, wonach das Hervorrufen des Magnetismus in dem Richten ursprünglich vorhandener Elementarmagnete oder Elementarströme besteht, so dass in Folge der magnetischen Einwirkung in einem Körpermoleküle eine hinsichtlich des magnetischen Verhaltens ausgezeichnete Richtung auftritt, während im neutralen Zustande keine solche vorhanden ist, weil die Elementarmagnete oder Elementarströme nach allen möglichen Richtungen orientirt sind.

Wir werden unsere Betrachtungen zunächst auf die Coulomb'sche Hypothese fussen lassen, später die Gründe erwähnen, welche eine Modification derselben erheischen und die hiernach nothwendige Erweiterung der aus der Coulomb'schen Hypothese gewonnenen Theorie des Magnetismus auseinandersetzen.

In der Elektrostatik werden zunächst nur vollkommene Leiter, die von vollkommenen Isolatoren umgeben sind, betrachtet; in der Lehre vom Magnetismus betrachtet man ebenso zunächst nur solche Körper, die einem Haufwerke vollkommen leitender und durch einen vollkommenen Isolator getrennter Moleküle vergleichbar sind. In den Molekülen solcher Körper können durch äussere magnetische Einwirkung unbegrenzte Mengen nördlichen und südlichen Fluidums geschieden und entwickelt werden und die getrennten Fluida vereinigen sich wiederum, der ursprüngliche, nichtmagnetische Zustand tritt wieder ein, sobald die äussere Einwirkung aufhört. Als Körper dieser Art kann man innerhalb gewisser Grenzen das weiche Eisen, Nickel, Kobalt, Eisenvitriol in fester Gestalt und in Wasser gelöst, Sauerstoffgas etc. ansehen.

Wie in der Elektrostatik als Quellen constanter elektrischer Wirkungen geladene Isolatoren angenommen wurden, deren Ladung als vollkommen fest und unveränderlich betrachtet

wurde, so werden wir jetzt die Unterstellung machen, dass der Magnetismus der als Quellen magnetischer Wirkungen dienenden Körper im Laufe der Zeit sich nicht ändere, auch von den sonst noch etwa auftretenden magnetischen Einwirkungen nicht merklich beeinflusst werde. Als solche permanente Magnete können der Magneteisenstein und der magnetisirte Stahl wenigstens innerhalb gewisser Grenzen angesehen werden, ferner auch, wie die Elektrodynamik lehrt, jeder constante elektrische Strom, sowie jeder Elektromagnet.

Zwei Hauptprobleme sind es, die sich uns bei den oben gemachten Einschränkungen und Annahmen zunächst darbieten, nämlich erstens die Wechselwirkung zwischen zwei permanenten Magneten zu bestimmen, und zweitens den magnetischen Zustand zu finden, welchen ein permanenter Magnet in einem erregbaren Körper hervorruft. Die erste Aufgabe bildet den Gegenstand der nächst folgenden Betrachtungen und erst durch ihre Behandlung werden wir im Stande sein, auf eine genauere experimentelle Bestätigung des Gesetzes über die Wirkungsweise der magnetischen Fluida einzugehen.

II.

WECHSELWIRKUNG ZWISCHEN ZWEI PERMANENTEN MAGNETEN.

1. Allgemeine Formeln.

Da die Anziehung oder Abstossung zweier magnetischer Punkt-Massen und der Körper, an welchen diese Massen haften, gerade proportional mit dem Producte der Massen und umgekehrt proportional mit dem Quadrate ihrer Entfernung angenommen wird, so lässt sich die Einwirkung, welche ein permanenter Magnet M von einem zweiten permanenten Magneten M' erleidet, in sehr einfacher Weise durch das Potential ihrer magnetischen Ladungen in Bezug aufeinander, d. i. das Potential des einen Magneten in Bezug auf die Ladung des anderen, darstellen. Dies Potential sei W, dann ist, wenn dq, dq' Elemente der einen und anderen Ladung bedeuten und r die Entfernung jener Elemente ist:

$$W = \int\int \frac{dq \cdot dq'}{r},$$

wo die eine Integration über die Ladung von M, die andere über die von M' ausgedehnt ist.

Die Wirkung, welche M von M' erleidet, lässt sich durch eine Kraft mit beliebigem Angriffspunkte und ein Kräftepaar oder Gegenpaar darstellen. Wir lassen jene im Anfangspunkte eines rechtwinkligen, übrigens aber beliebigen Coordinatensystemes angreifen und bezeichnen ihre Componenten nach den Axen durch X, Y, Z, sowie die Componenten des zugehörigen

Gegenpaares durch Ξ, H, Z. Wir bezeichnen ferner durch $\frac{dW}{dx}dx$ etc. die Wachsthümer von W, wie sie einer Verschiebung dx etc. des Magneten M in der Richtung von $-x$ nach $+x$ etc. entsprechen, sowie durch $\frac{dW}{d\xi}d\xi$ u. s. w. die Wachsthümer, welche resultiren, wenn M um die x-Axe u. s. w. so gedreht wird, dass $d\xi$ u. s. w. der der Drehung entsprechende Bogen im Kreise mit dem Radius Eins ist. Man hat alsdann, wie aus den Principien der Attractionsrechnung folgt:

$$X = -\frac{dW}{dx},\ Y = -\frac{dW}{dy},\ Z = -\frac{dW}{dz},$$

$$\Xi = -\frac{dW}{d\xi},\ \mathrm{H} = -\frac{dW}{d\eta},\ \mathrm{Z} = -\frac{dW}{d\zeta}.$$

Dem Ausdrucke W können noch andere Formen gegeben werden, die hier schon erwähnt werden mögen.

Bezeichnen wir die Potentiale der in den Magneten enthaltenen magnetischen Ladungen bezüglich durch V und V', so hat man auch:

$$W = \int V dq' = \int V' dq.$$

Denken wir uns das Element der magnetischen Ladung eines Magneten durch ein Quantum Elektricität ersetzt, das sich zur Einheit der Elektricität verhält, wie jenes Element zur Einheit des Magnetismus, so leuchtet ein, dass das elektrische und magnetische Potential einander gleich sind. Nun kann aber die auf gedachte Weise erhaltene elektrische Ladung durch eine andere über die Oberfläche des Magneten verbreitete Ladung ersetzt werden, ohne dass sich etwas in der nach aussen gerichteten Wirkung ändert, und die Quantität der oberflächlichen Ladung kommt dem Quantum der im Inneren enthaltenen Elektricität gleich (s. Elektrostatik IV. 3.). Es lässt sich also auch die ursprüngliche Ladung des Magneten durch eine über die Oberfläche verbreitete magnetische Ladung ersetzen, die aus gleichen Quanta nördlichen und südlichen Fluidums besteht. Bezeichnen wir durch ϱ, ϱ' für den einen und anderen Magneten die Flächendichtigkeit dieser Ladung in den Elementen ds, ds' der Oberflächen, so hat man:

$$W = \int\int \frac{\varrho\, ds \cdot \varrho' ds'}{r},$$

sowie auch:

$$V = \int \frac{\varrho\, ds}{r},\quad V' = \int \frac{\varrho' ds'}{r}.$$

Man bemerke noch, dass der Ausdruck W mit dem veränderlichen Theile des halben Potentiales sämmtlicher in beiden Magneten enthaltenen magnetischen Massen in Bezug auf sich selbst zusammenfällt.

2. Ueber das Potential eines permanenten Magneten.

Das Potential eines permanenten Magneten mit endlichen Dimensionen nimmt für die Punkte eines Raumes, dessen Dimensionen ebenfalls endlich sind, der aber unendlich weit von dem Magneten entfernt ist, eine einfache bemerkenswerthe Form an, die in der Folge häufig zur Sprache kommen wird und daher jetzt bestimmt werden soll.

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P in dem fraglichen Raume. Der im Magneten gelegene Punkt P' sei um R von dem Anfangspunkte O der Coordinaten entfernt, und die von diesem Anfangspunkt nach P' gezogene Gerade bilde mit den Axen die Winkel α, β, γ. Wenn dann ferner durch r die Entfernung der Punkte P und P' bezeichnet wird, so findet man mittelst der binomischen Entwicklung:

$$\frac{1}{r} = \{(x - R\cos\alpha)^2 + (y - R\cos\beta)^2 + (z - R\cos\gamma)^2\}^{-1/2} =$$

$$\frac{1}{R}$$

$$+ \frac{1}{R^2}\{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\}$$

$$+ \frac{1}{R^3}\{(\tfrac{3}{2}\cos\alpha^2 - \tfrac{1}{2})x^2 + (\tfrac{3}{2}\cos\beta^2 - \tfrac{1}{2})y^2 + (\tfrac{3}{2}\cos\gamma^2 - \tfrac{1}{2})z^2 +$$
$$3(xy\cos\alpha\cos\beta + xz\cos\alpha\cos\gamma + yz\cos\beta\cos\gamma)\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Für die einzelnen Glieder der obigen Entwicklung ist der Ausdruck $\Delta^2 \ldots$ oder $\frac{d^2 \ldots}{dx^2} + \frac{d^2 \ldots}{dy^2} + \frac{d^2 \ldots}{dz^2}$ der Null gleich.

Wir legen nun durch den Punkt P' des Magneten Coordinatenaxen, welche den ursprünglichen parallel sind und bezeichnen durch x', y', z' die Coordinaten des Elementes dq des im Magneten enthaltenen Fluidums in Bezug auf jene neuen Axen. Es leuchtet alsdann ein, dass wenn wir in die obige Entwicklung an die Stelle von x, y, z die Differenzen $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ einsetzen, die Entwicklung für den reciproken Werth der Distanz zwischen P und dq zum Vorschein kommt. Multipliciren wir also ferner mit dq und integriren wir über die sämmtlichen Elemente der im Magneten enthaltenen Fluida, so erhalten wir das Potential für den Punkt P.

Man bemerke aber erstlich, dass das Integral $\int dq$, d. i. die Summe des im Magneten enthaltenen nördlichen und südlichen Fluidums, weil letztere in gleicher absoluter Menge vorhanden sind, verschwindet. Ferner leuchtet ein, dass man für die Integrale

$$\int x' dq, \quad \int y' dq, \quad \int z' dq$$

bezüglich die Ausdrücke

$$ql \cos a, \quad ql \cos b, \quad ql \cos c$$

setzen kann, wenn $+ q$ und $- q$ die in dem Magneten enthaltenen Quanta nördlichen und südlichen Fluidums sind, l die Entfernung des Schwerpunktes N der nördlichen Quanta von dem Schwerpunkte S der südlichen Quanta bedeutet, und wenn a, b, c die Winkel sind, welche die Linie SN mit den Coordinatenaxen bildet. Mit Rücksicht auf obige Bemerkungen findet man für das Potential des Magneten, unter V_0 den Werth desselben im Coordinatenanfangspunkt verstanden:

$$\begin{aligned} &V_0 \\ &+ \frac{ql}{R^3} \{ (1 - 3\cos\alpha^2) \cos a \cdot x + (1 - 3 \cos\beta^2) \cos b \cdot y + (1 - 3\cos\gamma^2) \cos c \cdot z \\ &\quad - 3 \cos\alpha \cos\beta \, (\cos b \cdot x + \cos a \cdot y) - 3 \cos\alpha \cos\gamma \, (\cos c \cdot x + \cos a \cdot z) \\ &\quad - 3 \cos\beta \cos\gamma \, (\cos c \cdot y + \cos b \cdot z) \} \\ &+ \text{etc.} \ldots, \end{aligned}$$

wo zu setzen ist:

$$V_0 = -\frac{ql}{R^2}\{\cos\alpha\,\cos a + \cos\beta\,\cos b + \cos\gamma\,\cos c\} + \text{etc.}$$

Beide obigen Reihen ziehen sich, wenn die Coordinaten x, y, z, x', y', z' gegen die Distanz R verschwinden, auf ihre Anfangsglieder zurück. In diesem Falle hat man also wenn der Winkel zwischen der Linie SN und der Linie R — letztere in der Richtung OP' genommen — durch δ bezeichnet wird, für das Potential des Magneten:

$$-\frac{ql}{R^2}\cos\delta + \frac{ql}{R^3}\{(\cos a - 3\cos\alpha\cos\delta)x + (\cos b - 3\cos\beta\cos\delta)y + (\cos c - 3\cos\gamma\cos\delta)z\}.$$

Für die in endlicher Entfernung von dem Anfangspunkte der Coordinaten x, y, z gelegenen Punkte ist also der veränderliche Theil des Potentials eines unendlich weit entfernten Magneten eine homogene Function ersten Grades jener Coordinaten. Die Niveauflächen sind eben und unter einander parallel, die Kraftlinien gerade und ebenfalls unter einander parallel. Die Kraft K, mit welcher der Magnet auf ein Quantum Eins nördlichen Fluidums, das in einem Punkte concentrirt ist, also auf einen Nordpol mit dem Quantum Eins einwirkt, liegt in der Ebene, die durch jenen Punkt oder Pol und die Linie SN bestimmt wird. Man findet auch leicht:

$$K = \frac{ql}{R^3}\sqrt{1 + 3\cos\delta^2}.$$

Ausserdem ergiebt sich für den Winkel η zwischen der Kraft K und der Linie, welche den Pol und die Mitte von SN verbindet, oder auch für den Winkel, welchen die Richtungen von K und R mit einander bilden:

$$\cos\eta = \frac{2\cos\delta}{\sqrt{1 + 3\cos\delta^2}}.$$

Ein Raum, welcher wie der oben betrachtete von ebenen Niveauflächen durchzogen wird, heisst ein homogenes magnetisches Feld. Als ein solches wird, welches auch die Dimensionen des Magneten sein mögen, jeder Raum angesehen werden dürfen, dessen Dimensionen gegen die Distanzen derjenigen Theile des Magneten verschwinden, deren Wirkungen hauptsächlich in Betracht kommen. So kann das Potential für die magnetische Wirkung der Erde, wenn es sich um die Einwirkung auf einen

Magneten von den gewöhnlichen Dimensionen handelt, als homogen betrachtet werden. Denkt man sich nämlich um den Magneten eine Kugel beschrieben, deren Radius schon sehr gross ist im Vergleich mit den Dimensionen des Magneten, jedoch noch sehr klein im Vergleich mit denen der Erde, so würde die Einwirkung auf den Magneten nicht merklich geändert werden, wenn der innerhalb der Kugel befindliche Theil der Erde entfernt würde.

Für die Wirkung in die Ferne kann, wie der Potentialausdruck ersehen lässt, der Magnet durch einen Nord- und einen Südpol ersetzt werden, deren Quantitäten den absoluten Werth q haben und die in den Schwerpunkten N, S der nördlichen und der südlichen magnetischen Quanta liegen. Diese zwei Pole bilden eine ideale Magnetnadel von der Länge l.

Die Linie SN nennt man die Axe, das Product ql das magnetische Moment des permanenten Magneten aus Gründen, welche aus den nächstfolgenden Betrachtungen erhellen werden.

3. Verhalten eines permanenten Magneten im homogenen magnetischen Felde.

Ein permanenter Magnet mit den Polen N und S befinde sich in einem homogenen magnetischen Felde, in welchem das Potential

$$V' = Ax + By + Cz + D$$

herrscht. Unter dq das Element des im Magneten enthaltenen magnetischen Fluidums verstanden, hat man alsdann:

$$W = \int V' dq = A \int x dq + B \int y dq + C \int z dq$$

für den Ausdruck, durch dessen Variation die Einwirkung auf den Magneten gefunden werden kann.

Bezeichnen wir die Länge der Linie SN durch l, den absoluten Werth des im einzelnen Pole concentrirt gedachten Quantums durch q und die Winkel, welche die magnetische Axe SN mit den Coordinatenaxen bildet, durch a, b, c, so kann man auch schreiben:

$$W = ql\,(A\cos a + B\cos b + C\cos c),$$

oder auch, wenn K die Kraft ist, mit welcher ein Pol mit dem Quantum Eins durch die magnetische Wirkung sollicitirt wird, und ψ den Winkel bedeutet, den diese Kraft mit der Richtung von SN bildet:

$$W = -\,ql\cos\psi\,.\,K.$$

Die Betrachtung dieses Ausdruckes führt zu dem Resultate, dass die Wirkung, welche der Magnet erleidet, sich durch zwei ein Gegenpaar bildende Kräfte von der Grösse qK darstellen lässt, die in je einem Pole angreifen und deren Richtungen mit den Kraftlinien parallel sind. Die in dem Nordpole angreifende Kraft hat dieselbe Richtung wie die oben durch K bezeichnete Kraft. Wenn der Magnet um eine Axe drehbar ist, so bietet er zwei Lagen des Gleichgewichtes dar; es sind dies diejenigen Lagen, wo eine durch die magnetische Axe mit der Richtung der Kraftlinien parallel gelegte Ebene auch mit der Drehaxe parallel läuft. In der einen Lage, wo der Nordpol des Magneten nach der Seite hin liegt, nach welcher die Kraft K hingekehrt ist, hat der Ausdruck W einen Minimumswerth und ist das Gleichgewicht stabil. In der zweiten Lage, wo der Nordpol nach der entgegengesetzten Seite liegt, ist W ein Maximum und das Gleichgewicht labil. Ein indifferentes Gleichgewicht findet statt, wenn die Drehaxe mit der magnetischen Axe parallel ist.

Es ist hier der Ort, anzudeuten, wie die Richtung und Grösse der Kraft in einem homogenen magnetischen Felde bestimmt werde. Bei diesen Auseinandersetzungen wollen wir annehmen, das homogene Feld sei das des Erdmagnetismus. Die Richtung der Kraft wird gefunden, indem man die Declination und Inclination bestimmt.

Die Declination kann mittelst des Gauss'schen Magnetometers gefunden werden. (Bemerkungen über die Einrichtung magnetischer Observatorien und Beschreibung der darin aufzustellenden Instrumente. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836, von Gauss und Weber. 1837). Dasselbe besteht bekanntlich aus einem Magnetstabe, der horizontal an einem aus einfachen Coconfäden zusammengesetzten Faden oder einem dünnen Metalldrahte aufgehängt

ist. Der Magnet, meist von der Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums mit vorherrschender Längendimension und ungleichseitigem Querschnitte, ist regelmässig magnetisirt, so dass seine magnetische Axe nur wenig von der geometrischen abweicht. Er liegt mit seiner breiten Seitenfläche horizontal in einer nicht magnetischen Hülse, welche letztere an einem horizontalen Theilkreise so befestigt ist, dass ihr noch eine Drehung um dessen Axe gestattet ist. Der Theilkreis selbst ist an dem Aufhängefaden befestigt. An dem einen Ende trägt der Magnetstab einen kleinen Spiegel, der mit Hülfe von Stellschrauben und durch Anwendung von Fernrohr und Skala senkrecht zur geometrischen Axe des Magnetstabes gestellt werden kann. Der Spiegel dient dazu, die Winkeldistanz der geometrischen Axe von einer festen durch die Drehaxe gehenden Fundamentalebene mittelst Fernrohr und Skala zu bestimmen.

Auf den Stab des Magnetometers wirkt, wenn er ins Gleichgewicht gekommen ist, die von der Aufhängung herrührende Torsionskraft und der Erdmagnetismus. Es sei nun τ das dem Bogen Eins entsprechende Torsionsmoment des Aufhängungsfadens, θ das von der gedachten Fundamentalebene an gerechnete Azimuth der geometrischen Axe für den Fall, dass der Magnet der Einwirkung der Erde entzogen wäre, φ das Azimuth, welches jene Axe wirklich einnimmt. Hierbei werde unterstellt, dass jene Winkel im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers gerechnet werden, das beobachtende Auge im Zenithe gedacht. Der Ausdruck

$$\tau(\theta - \varphi)$$

stellt alsdann das von der Torsion herrührende Gegenpaar dar. Was die Einwirkung der Erde betrifft, so bestimmt sich dieselbe dem Früheren zufolge durch den Ausdruck:

$$W = - M T \cos\psi,$$

wo M das magnetische Moment des Stabes, T die Erdkraft und ψ den Winkel bedeutet, den letztere mit der magnetischen Axe des Stabes einschliesst.

Wenn aber ε der Winkel ist, den die magnetische Axe des Stabes mit dem Horizonte bildet, σ den Winkel bedeutet, welchen die Horizontalprojection jener Axe mit der geometrischen

Axe bildet, ferner α das Azimuth des magnetischen Meridianes und i die Inclination darstellt, so hat man:

$$\cos\psi = \cos(\varphi + \sigma - \alpha)\cos\varepsilon\cos i + \sin\varepsilon\sin i.$$

Also hat man für die horizontale Componente des von dem Erd-Magnetismus herrührenden und am Magnetstabe wirkenden Gegenpaares:

$$-\frac{dW}{d\varphi} = -MT\sin(\varphi + \sigma - \alpha)\cos\varepsilon\cos i,$$

wobei zu bemerken, dass die genannte Componente als positiv gerechnet wird, wenn dem Sinne ihrer Drehung ein positives Wachsthum des Azimuthes entspricht. Wenn die Winkel $\varphi - \alpha$, σ und ε nur klein sind — was bei den Beobachtungen erzielt werden muss — und nur die ersten Potenzen berücksichtigt werden, so hat man dem Obigen zufolge:

$$1.\quad \tau(\theta - \varphi) = E(\varphi + \sigma - \alpha),$$

wo E für das Product $MT\cos i$ gesetzt ist.

Nachdem der Winkel φ beobachtet ist, hat man erstlich das für die weiteren Bestimmungen erforderliche Verhältniss zwischen den Grössen τ und E zu bestimmen. Zu dem Ende wird die Hülse um die Axe des Torsionskreises gedreht, wobei sie den Winkel w beschreibe, und alsdann wird wieder das Azimuth der geometrischen Axe bestimmt, welches φ' sei. Man hat dann nach der Gleichung 1:

$$2.\quad \tau(\theta + w - \varphi') = E(\varphi' + \sigma - \alpha).$$

Aus den Gleichungen 1 und 2 folgt nun:

$$\frac{E}{\tau} = \frac{w}{\varphi' - \varphi} - 1 = k.$$

Um ferner den Winkel σ zu finden, legt man den Magnetstab um, so dass diejenige Seitenfläche, welche ursprünglich unten lag, jetzt nach oben hin zu liegen kommt. Wenn hierauf der Magnet sich in das Azimuth φ_1 einstellt, so hat man offenbar:

$$3.\quad \tau(\theta - \varphi_1) = E(\varphi_1 - \sigma - \alpha).$$

Die Combination dieser Gleichung mit der Gleichung 1 liefert:

$$\sigma = \frac{1 + k}{2k}(\varphi_1 - \varphi).$$

Endlich wird, während die Hülse die ursprüngliche Stellung auf dem Torsionskreise einnimmt, an die Stelle des Magnetstabes ein zweiter Hülfsstab gebracht, der in Form, Stoff und

Gewicht dem ersten möglichst nahe kommt, aber nur schwach magnetisirt ist. Für diesen Stab seien k_0, σ_0, E_0, φ_0 die Werthe der Grössen, welche für den ersten Stab durch k, σ, E und φ bezeichnet wurden. Alsdann hat man nach der Gleichung 1:

$$4.\quad \tau(\theta - \varphi_0) = E_0(\varphi_0 + \sigma_0 - \alpha).$$

Die Combination der Gleichungen 1 und 4 liefert aber endlich für das Azimuth α des magnetischen Meridians:

$$\alpha = \frac{k(\varphi + \sigma) - k_0(\varphi_0 + \sigma_0) + (\varphi - \varphi_0)}{k - k_0}.$$

Da die Declination bekanntlich fortwährend Variationen zeigt, so leuchtet ein, dass die einzelnen Beobachtungen auf dieselbe Epoche reducirt werden müssen. Zu dem Ende muss während jener Beobachtungen die Variation des Azimuthes des magnetischen Meridianes an einem zweiten Magnetometer beobachtet werden. Wie die Gleichung 1 ersehen lässt, darf man aber die Variationen jenes Azimuthes als gleich den Variationen des Azimuthes φ betrachten, sobald die Torsion τ im Vergleich mit der Grösse E sehr klein ist.

Zur Bestimmung der Inclination dient unter anderen das Inclinatorium, dessen Einrichtung wir als bekannt voraussetzen. Bei der Anwendung jenes Instrumentes darf man nicht, wie es wünschenswerth wäre, die Annahme zulassen, dass die magnetische und geometrische Axe der Nadel zusammenfallen, noch auch, dass die Drehaxe der Nadel genau durch den Schwerpunkt geht. Von diesen beiden Umständen wird jedoch das Resultat unabhängig, wenn man wie folgt verfährt.

Zuerst bestimmt man, nachdem der Verticalkreis zur Coincidenz mit dem magnetischen Meridiane gebracht worden, die Inclination φ der Linie, welche die Spitzen der Nadel verbindet, oder der geometrischen Axe. Hierauf wird der Verticalkreis um 180° gedreht, so dass diejenige Seite der Nadel, welche vorher ostwärts gekehrt war, jetzt nach Westen hin zu liegen kommt, und beobachtet man wiederum die Inclination, welche jetzt φ_1 sei. Für die mittlere Oscillationsdauer der Nadel in den beiden gedachten Lagen werde zugleich der Werth Δ beobachtet. Dieselben Bestimmungen werden ferner nochmals gemacht, nachdem die Pole der Nadel umgekehrt worden sind; es mögen hierbei bezüglich die Werthe φ' und φ_1' für die In-

clination, und der Werth Δ' für die Oscillationsdauer gefunden werden.

Es werde nun durch σ der Winkel bezeichnet, welchen die auf die Ebene des Verticalkreises projicirte magnetische Axe mit der geometrischen einschliesst, diesen Winkel in demselben Sinne wie die Inclination gerechnet. Ferner sei d die Länge der auf die gedachte Ebene projicirten Verbindungslinie des Mittelpunktes und des Schwerpunktes der Nadel, so wie ζ der Winkel, welchen diese Projection mit der geometrischen Axe bildet. Man hat dann, wenn noch das Gewicht der Nadel durch p, das magnetische Moment vor der Umkehrung der Pole durch M und die wahre Inclination durch i bezeichnet wird, für den zuerst beobachteten Fall:

$$MT \sin(\varphi + \sigma - i) = pd \cos(\varphi + \zeta).$$

Hierfür setzen wir, da der Winkel $\varphi + \sigma - i$ nur klein ist und indem wir für den kleinen Quotienten $pd : MT$ den Buchstaben q setzen:

$$\varphi + \sigma - i = q \cos(\varphi + \zeta).$$

Ebenso ergiebt sich für die zweite Beobachtung:

$$\varphi_1 - \sigma - i = q \cos(\varphi_1 - \zeta).$$

Nach Umkehrung der Pole tritt an die Stelle von q ein neuer Werth q', und man findet für die zwei letzten Beobachtungen, wenn die Lage der magnetischen Axe nicht geändert wird, wie unterstellt werden darf:

$$i - \varphi' - \sigma = q' \cos(\varphi' + \zeta)$$
$$i - \varphi_1' + \sigma = q' \cos(\varphi_1' - \zeta).$$

Wie man leicht einsieht ist aber:

$$\frac{q'}{q} = \frac{M}{M'} = \frac{\Delta'^2}{\Delta^2}.$$

Bezeichnen wir also letzteren Quotienten durch λ und setzen wir:

$$q \cos \zeta = t, \; q \sin \zeta = u,$$

so haben wir:

$$i = \varphi + \sigma - t \cos \varphi + u \sin \varphi,$$
$$i = \varphi_1 - \sigma - t \cos \varphi_1 - u \sin \varphi_1,$$
$$i = \varphi' + \sigma + t\lambda \cos \varphi' - u\lambda \sin \varphi',$$
$$i = \varphi_1' - \sigma + t\lambda \cos \varphi_1' + u\lambda \sin \varphi_1'.$$

Die Elimination der drei Grössen σ, t, u aus obigen vier Glei-

chungen liefert endlich den allen vier Beobachtungen entsprechenden Werth der Inclination i.

Es erübrigt jetzt noch anzugeben, wie die Grösse oder Intensität des tellurischen Magnetismus gefunden werde. Zur Erleichterung des Verständnisses der hierfür von Gauss angegebenen Methode wollen wir aber zuvor die Versuche erörtern, welche derselbe angestellt hat, um das Grundgesetz der magnetischen Wirkung zu beweisen.

4. Experimentelle Prüfung des Grundgesetzes für die magnetische Wirkung.

Die von Gauss (*Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* 1833) zur Prüfung des Grundgesetzes für die magnetische Wirkung angestellten Versuche bestanden darin, dass die Ablenkungen bestimmt wurden, welche ein horizontal aufgehängter Magnetstab erlitt, als er der Einwirkung eines zweiten ebenfalls horizontalen und in gleicher Höhe befindlichen, aber festen Magnetstabes ausgesetzt wurde.

Beide Stäbe waren ungefähr 30 Centimeter lang und die Entfernung ihrer Mittelpunkte wurde von 110 bis 400 Centimeter variirt.

Auf den beweglichen Stab wirkte, so lange er noch nicht dem Einflusse des zweiten Stabes ausgesetzt war, lediglich der Erdmagnetismus und die von der Aufhängung herrührende Torsionskraft, die jedoch im Vergleich mit jenem sehr klein war.

Der zweite Stab wurde, wie bemerkt, in gleiche Höhe mit dem ersten und für je eine bestimmte Entfernung seines Mittelpunktes von dem des beweglichen Stabes in zwei ausgezeichnete Lagen gegen letzteren gebracht. Erstens nämlich wurde er so gelegt, dass sein Mittelpunkt in den durch den Mittelpunkt des beweglichen Stabes gehenden Meridian zu liegen kam, während seine Axe senkrecht auf diesem stand. Ferner wurde er zweitens mit seiner Axe wiederum senkrecht zum magnetischen Meridian aber so gelegt, dass jene die Mitte des beweglichen Sta-

bes traf. Die eine wie die andere der beiden Lagen konnte auf vierfache Weise erzielt werden. Bei der ersten Lage nämlich kann der feste Magnet nördlich oder südlich von dem beweglichen Magneten liegen und kann er seinen Nordpol entweder nach Osten oder nach Westen hinkehren. Bei der zweiten Lage aber kann der feste Magnet auf der östlichen oder westlichen Seite des beweglichen Magneten liegen und kann sein Nordpol ost- oder westwärts gekehrt sein.

Die Einwirkung des festen Magneten auf den beweglichen bestand nun darin, dass letzterer aus seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage abgelenkt wurde und in einem neuen Azimuthe zur Ruhe kam, welches mit dem der Gleichgewichtslage einen kleinen Winkel bildete. Hierbei musste bei jeder der beiden gedachten Lagen der Nordpol in zwei leicht von vornherein zu bestimmenden Fällen nach Osten und in den beiden übrigen nach Westen hin abgelenkt werden. Aus den jedesmal sich ergebenden vier Ablenkungen wurde das Mittel genommen und so ergaben sich die in der folgenden Tabelle aufgeführten Resultate. Es enthält aber die erste Columne die in Centimeter ausgedrückten Entfernungen R der Centra beider Stäbe, die Columne φ_1 die der ersten, die Columne φ_2 die der zweiten Lage entsprechenden Ablenkungen.

R	φ_1	φ_2	R	φ_1	φ_2
110	1°.57′.24,8″	. . .	190	0°.22′. 9,2″	0°.43′.21,8″
120	1. 29. 40,5	. . .	200	0. 19. 1,6	0. 37. 16,2
130	1. 10. 19,3	2°.13′.51,2″	210	0. 16. 24,7	0. 32. 4,6
140	0. 55. 58,9	1. 47. 28,6	250	0. 9. 36,1	0. 18. 51,9
150	0. 45. 14,3	1. 27. 19,1	300	0. 5. 33,7	0. 11. 0,7
160	0. 37. 12,2	1. 12. 7,6	350	0. 3. 28,9	0. 6. 56,9
170	0. 30. 57,9	1. 0. 9,9	400	0. 2. 22,2	0. 4. 35,9
180	0. 25. 59,5	0. 50. 52,5			

Indem wir die vorhergehenden Versuche mit der Theorie vergleichen, dürfen wir die Annahme machen, dass die Verbindungslinie der magnetischen Centra beider Stäbe horizontal sei, und dass ihre magnetischen Axen mit dem Horizonte nur sehr

kleine Winkel bilden. Wenn wir alsdann die zweiten Potenzen der Bogen dieser Winkel vernachlässigen, so erhalten wir für das von der Torsion und dem Erdmagnetismus herrührende horizontale Gegenpaar, welches an dem beweglichen Stabe wirkt, dem Früheren zufolge:

$$\tau(\theta - \varphi) - MT \cos i \sin \varphi.$$

Hier bedeutet τ die Torsion, M das magnetische Moment des beweglichen Stabes, T die Erdkraft, i die Inclination, θ das vom magnetischen Meridian an gerechnete Azimuth der magnetischen Axe für den Fall, dass die Torsion allein wirkt, und φ das wirkliche Azimuth der magnetischen Axe.

Obiger Ausdruck verschwindet, wenn man für φ das Azimuth φ_0 setzt, in welchem der Stab zur Ruhe kommt, so lange der feste Magnet noch nicht auf denselben einwirkt. Mit Rücksicht hierauf können wir für jenen Ausdruck setzen:

$$-(MT \cos i + \tau) \sin v,$$

wo für $\varphi - \varphi_0$, d. i. die Winkeldistanz der magnetischen Axe von dem Gleichgewichtsazimuthe, der Buchstabe v gesetzt ist.

Was die Einwirkung des festen Magneten betrifft, so betrachten wir zunächst den Fall, wo die Dimensionen beider Magnete gegen die Entfernung R ihrer Centra verschwinden. In diesem Falle wird die fragliche Wirkung offenbar durch ein Gegenpaar dargestellt, und sie kann unter andern mit Hülfe des Potentiales der Magnete in Bezug auf einander gefunden werden. Mittelst der in 2. und 3. aufgestellten Formeln erhält man aber für dieses Potential:

$$W = \frac{MM'}{R^3} (\cos \varDelta - 3 \cos \delta \cos \delta').$$

Hier bedeutet M' das Moment des festen Magneten, während δ, δ' die Winkel sind, welche die magnetischen Axen SN, $S'N'$ der Magnete mit der Linie R bilden, letztere in der Richtung vom beweglichen Magneten nach dem festen hin genommen, und endlich $\varDelta$ den Winkel zwischen jenen Axen darstellt.

Es seien nun ε, ε' die sehr kleinen Winkel, welche die magnetischen Axen mit dem Horizonte bilden, ferner ψ, ψ' die Winkel, welche die Horizontalprojectionen jener Axen mit der Linie R bilden. Dann hat man:

$$\cos\delta = \cos\psi \cos\varepsilon, \quad \cos\delta' = \cos\psi' \cos\varepsilon',$$
$$\cos\varDelta = \cos(\psi - \psi') \cos\varepsilon \cos\varepsilon' + \sin\varepsilon \sin\varepsilon'.$$

Hiernach ergiebt sich für die allein zu berücksichtigende horizontale Componente des genannten Gegenpaares:

$$-\frac{dW}{d\psi} = -\frac{MM'}{R^3}(2 \sin\psi \cos\psi' + \cos\psi \sin\psi') \cos\varepsilon \cos\varepsilon'.$$

Der letzte Ausdruck lässt ersehen, dass man ohne erheblichen Fehler die Abweichungen ε, ε' der magnetischen Axen vom Horizonte unberücksichtigt lassen kann. Ferner ergiebt sich für diejenige relative Lage der beiden Magnete, welche wir die erste genannt haben und wobei ψ sehr nahe 0^0 oder 180^0, ψ' aber sehr nahe 90^0 oder 270^0 ist:

$$-\frac{dW}{d\psi} = -\frac{MM' \cos\psi \sin\psi'}{R^3}.$$

Für die zweite Lage, wobei ψ' nahe 0^0 oder 180^0, ψ aber nahe 90^0 oder 270^0 ist, hat man:

$$-\frac{dW}{d\psi} = -\frac{2 MM' \sin\psi \cos\psi'}{R^3}.$$

Mittelst der beiden letzt gewonnenen Ausdrücke und dem für das Gegenpaar, welches von der Torsion und dem Erdmagnetismus herrührt, findet man jetzt leicht, wenn man noch berücksichtigt, dass das Gleichgewichtsazimuth nur wenig von dem magnetischen Meridiane abweicht, die folgenden Relationen:

$$\operatorname{tang} v_1 = \frac{P}{R^3}, \quad \operatorname{tang} v_2 = \frac{2P}{R^3},$$

wo v_1 und v_2 die absoluten Werthe der der ersten und zweiten Lage entsprechenden Ausschläge sind und wo zu setzen ist:

$$P = \frac{MM'}{MT \cos i + \tau}.$$

In der That finden sich die beiden obigen Relationen, wie die Berechnung von P ergiebt, durch diejenigen der mitgetheilten Beobachtungen annähernd bestätigt, bei welchen R mehr als das Achtfache der Länge der Stäbe ausmacht. Bei geringeren Distanzen tritt, wie aus 2. und 3. erhellt, an die Stelle des oben für das Potential angewandten Ausdruckes eine nach negativen ganzen Potenzen von R fortschreitende Entwicklung, deren erstes Glied mit jenem Ausdrucke zusammenfällt. Aehnliche Entwicklungen gelten dann auch für $\operatorname{tang} v_1$ und $\operatorname{tang} v_2$. Und

wenn ins Besondere die angewandten Magnete regelmässig magnetisirt sind, so treten in diesen letzten Entwicklungen nur ungerade Potenzen von R auf; denn dadurch, dass das Vorzeichen von R umgekehrt wird, muss unter den gedachten Verhältnissen auch das Vorzeichen der beiden Tangenten sich umkehren, während zugleich ihr absoluter Werth ungeändert bleiben muss. Wirklich lassen sich die von Gauss angestellten Beobachtungen mit grosser Genauigkeit darstellen, wenn man annähernd setzt:

$$tang\, v_1 = \frac{P}{R^3} + \frac{Q_1}{R^5},\; tang\, v_2 = \frac{2P}{R^3} + \frac{Q_2}{R^5}.$$

Durch die Methode der kleinsten Quadrate findet man dann:

$$P = 43435,\; Q_1 = 244900,\; Q_2 = -218500,$$

und mittelst dieser Werthe berechnen sich aus obigen Formeln die folgenden Ablenkungen, welche von den beobachteten nur sehr wenig verschieden sind:

R	v_1	v_2	R	v_1	v_2
110	1°.57′.22,0″	. . .	190	0°.22′. 6,6″	0°.43′.14,0″
120	1. 29. 46,5	. . .	200	0. 18. 55,7	0. 37. 5,6
130	1. 10. 13,3	2°.13′.50,4″	210	0. 16. 19,8	0. 32. 3,7
140	0. 55. 58,7	1. 47. 24,1	250	0. 9. 38,6	0. 19. 2,1
150	0. 45. 20,9	1. 27. 28,7	300	0. 5. 33,9	0. 11. 1,8
160	0. 37. 15,4	1. 12. 10,9	350	0. 3. 29,8	0. 6. 57,1
170	0. 30. 59,1	1. 0. 14,9	400	0. 2. 20,5	0. 4. 39,6
180	0. 26. 2,9	0. 50. 48,3			

Wir gehen jetzt zur Beschreibung der Methode über, durch welche Gauss a. a. O. die Intensität des tellurischen Magnetismus zu finden gelehrt hat. Diese Methode besteht darin, dass man, unter M das magnetische Moment des bei den Versuchen anzuwendenden Magnetstabes verstanden, durch Oscillationsbeobachtungen den Werth des Productes MT sowie ferner auf die im Nächstvorhergehenden auseinandergesetzte Weise den Quotienten $M:T$ bestimmt und aus beiden Werthen die Grösse T ableitet.

Durch Beobachtung der Schwingungen, welche der Magnet-

stab, nachdem er in ein Magnetometer gebracht worden, ausführt, ergebe sich für verschwindende Amplituden und den luftleeren Raum der Werth $\varDelta$ als Dauer einer ganzen Oscillation. Alsdann hat man, wenn die bisherigen Bezeichnungen beibehalten werden und noch für das Trägheitsmoment des Stabes J gesetzt wird:

$$\varDelta = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MT\cos i + \tau}}.$$

Nachdem hierauf das Trägheitsmoment des Magnetstabes um eine genau zu ermittelnde Grösse I vermehrt worden, werde für die Oscillationsdauer der Werth $\varDelta'$ gefunden. Es ist dann:

$$\varDelta' = 2\pi \sqrt{\frac{J+I}{MT\cos i + \tau}}.$$

Durch Elimination der Grösse J findet man jetzt für das beschleunigende Gegenpaar des Magnetstabes:

$$MT\cos i + \tau = \frac{4\pi^2 I}{\varDelta'^2 - \varDelta^2}.$$

Der Quotient $\tau : MT\cos i$ lässt sich auf die bei Besprechung der Declination angegebene Weise finden. Bezeichnen wir denselben durch k, so erhalten wir endlich:

$$1.\quad MT = \frac{4\pi^2 I}{(1+k)\cos i\,(\varDelta'^2 - \varDelta^2)}.$$

Um ferner den Quotienten $M : T$ zu erhalten, wird an die Stelle des Magnetstabes ein zweiter Hülfsmagnet in das Magnetometer gebracht. Der erste Magnet aber wird in die Ost-West-Linie gelegt und für zwei verschiedene Entfernungen R' und R'' seines Mittelpunktes von dem im Magnetometer befindlichen werden die Ablenkungen v' und v'' des letzteren bestimmt. Man hat dann, wenn M' das magnetische Moment des Hülfsmagneten ist, dem Früheren zufolge:

$$\frac{MM'}{M'T\cos i + \tau} = \frac{R''^5 \operatorname{tang} v'' - R'^5 \operatorname{tang} v'}{2(R''^2 - R'^2)},$$

oder wenn noch für den Quotienten $\tau : M'T\cos i$ der Werth k' beobachtet wird:

$$2.\quad \frac{M}{T} = (1+k')\cos i\,\frac{R''^5 \operatorname{tang} v'' - R'^5 \operatorname{tang} v'}{2(R''^2 - R'^2)}.$$

Die vorhergehende Auseinandersetzung möge an einigen

der von Gauss a. a. O. mitgetheilten Beobachtungen erläutert werden.

Auf den Magnetstab des Magnetometers wurde horizontal und senkrecht zur Axe ein hölzerner parallelepipedischer Stab so aufgelegt, dass sein Mittelpunkt nahezu in die Drehaxe fiel. Der Hülfsstab wurde mit zwei Gewichten von je 103,2572 Grm. belastet, so zwar, dass diese mit ihren Bügeln auf feine in den Stab eingelegte Spitzen drückten, die in gleicher Entfernung von der Drehaxe lagen. Als die Entfernung 3 Centimeter betrug, ergab sich für die Dauer einer ganzen Oscillation aus mindestens 50 ganzen Schwingungen 31,6114 Secunden mittlerer Sonnenzeit. Hierauf wurden die Belastungsgewichte in eine Entfernung von je 18 Centimetern gebracht und es ergab sich hierbei eine Oscillationsdauer von 49,2872 Secunden. Gleichzeitig wurde die Dauer der Oscillationen eines zweiten Magnetometers beobachtet und bezüglich 34,6162 und 34,6496 gefunden. Hiernach beträgt die auf die Zeit der ersten Beobachtung reducirte Oscillationsdauer bei der zweiten Belastung 49,2396 Secunden. Bei diesen Versuchen war also:

$$I = 2 \,.\, 103{,}2572\,(18^2 - 3^2) = 65052,$$

$$\varDelta = 31{,}6114, \quad \varDelta' = 49{,}2396.$$

Ausserdem wurde beobachtet:

$$MT\cos i : \tau = 424{,}8.$$

Mittelst obiger Data findet man nun aus der Gleichung 1:

$$\text{I.} \quad MT\cos i = 1798.$$

Es wurde aber ferner an die Stelle eines Magnetstabes ein zweiter Hülfsmagnet gebracht, jener in die Ost-West-Linie des letzteren gelegt und die Ablenkung des Hülfsmagneten beobachtet. Für die Entfernungen $R' = 120$ und $R'' = 160$ ergab sich bezüglich $v' = 3^0\,42'\,19{,}4''$ und $v'' = 1^0\,34'\,19{,}3''$. Ueberdies wurde beobachtet:

$$M'T\cos i : \tau = 721{,}6.$$

Der Gleichung 2 zufolge war also:

$$\frac{M}{T\cos i} = 56606.$$

Die letzte Zahl bedarf noch einer Correction wegen der Variation von $T\cos i$, indem man von der Variation, welche das magnetische Moment des Stabes während der zwischen den bei-

den Beobachtungen verstrichenen Zeit einer Woche erlitt, absehen darf. Nun betrug aber bei den letzten Beobachtungen die Oscillationsdauer im zweiten Magnetometer 34,5954 Secunden mittlerer Sonnenzeit. Nehmen wir also annähernd $T \cos i$ umgekehrt proportional mit dem Quadrate der Oscillationsdauer, so finden wir für die Zeit der ersten von allen Beobachtungen:

$$\text{II.} \quad \frac{M}{T \cos i} = 56640.$$

Aus den Gleichungen I. und II. findet man jetzt:

$$T \cos i = 0{,}1782.$$

Für die Inclination hatte Gauss einige Monate vor der letzterwähnten Beobachtungsreihe den Werth $68^0\ 22'\ 52''$ gefunden. Von der Variation der Inclination abgesehen war also:

$$T = 0{,}4837.$$

Was die Bedeutung der letzten Zahl betrifft, so bemerken wir wiederholend, dass sie die Geschwindigkeit darstellt, welche die Masse Eins während der Zeit Eins erlangt, wenn auf dieselbe die Kraft wirkt, mit welcher der Erdmagnetismus auf das Quantum Eins des magnetischen Fluidums einwirkt. Als Einheit der Geschwindigkeit nehmen wir das Centimeter, als Einheit der Zeit die Secunde, als Einheit der Masse das Gramm an. Für die Einheit des magnetischen Fluidums nehmen wir aber das Quantum an, das in einen Punkt concentrirt auf ein zweites absolut genommen gleiches und ebenfalls in einen Punkt concentrirtes Quantum bei der Entfernung Eins mit einer Kraft einwirkt, die während der Zeit Eins der Masse Eins die Geschwindigkeit Eins ertheilen würde.

5. Mathematische Darstellung der Wirkung des Erdmagnetismus.

Es erscheint von hohem Interesse, den magnetischen Zustand der Erde, inwiefern er sich zu einer bestimmten Zeit auf der Oberfläche äussert, mathematisch darzustellen. Wie dies mittelst der nöthigen zur betreffenden Zeit anzustellenden

Beobachtungen erzielt werde, soll in dem Folgenden auseinandergesetzt werden.

In der Elektrostatik wurde gezeigt, dass die nach aussen gerichtete Wirkung elektrischer Massen, die in dem Innern eines Körpers irgendwie vertheilt sind, sich ersetzen lasse durch die Wirkung von elektrischen Massen, welche in einer unendlich dünnen Schicht auf der Oberfläche des Körpers liegen. Zugleich wurde bewiesen, dass hierbei die Summe der letztgenannten Massen gleichkommt der Summe der im Körper enthaltenen Massen. Beide Sätze lassen sich offenbar ohne Weiteres auf die magnetischen Fluida ausdehnen. Für den ausserhalb eines Magneten befindlichen Raum ist also die Wirkung des Magneten dieselbe, wie die einer verschwindend dünnen Schicht von positivem und negativem über die Oberfläche des Magneten nach einem gewissen Gesetze vertheilten Fluidum und es sind hierbei die Quanta der beiden Fluida entgegengesetzt gleich.

Aus dem Obigen folgt, dass sich das Potential des Erdmagnetismus in gleicher Weise wie das Potential der Ladung eines sphärischen Conductors entwickeln lasse. Bezeichnen wir also durch t die Entfernung eines über oder auf der Erde befindlichen Punktes vom Mittelpunkte der Erde, durch R den Radius der letzteren und berücksichtigen wir, dass das Gesammtquantum der idealen Ladung verschwindet, so hat man für das magnetische Potential V der Erde in dem ausserhalb der letzteren befindlichen Raume, nach Elektrostatik IV. 2. a:

$$\frac{V}{R} = \sum_{1}^{\infty} P_n \left(\frac{R}{t}\right)^{n+1},$$

wo, unter φ die Poldistanz, unter θ die geographische Länge und unter A und B gewisse Constanten verstanden, zu setzen ist:

$$P_n = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{d^i \pi_n (\cos\varphi)}{d(\cos\varphi)^i} \sin\varphi^i (A_{n,i} \sin i\theta + B_{n,i} \cos i\theta),$$

$$\pi_n(\cos\varphi) = \cos\varphi^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cos\varphi^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} \cos\varphi^{n-4} - \cdots$$

Die zu Anfang gestellte Aufgabe besteht, wie man sieht, darin, eine hinreichende Zahl der Constanten A und B zu bestimmen, so dass sich mittelst obiger Entwicklungen für jeden

Punkt der Erdoberfläche in befriedigender Weise die Richtung und Grösse der magnetischen Erdkraft darstellen lässt, oder was dasselbe heisst, drei auf einander senkrechte Componenten jener Kraft. Für die Richtungen dieser Componenten nehmen wir die Richtung des geographischen Meridianes, von Süden nach Norden, senkrecht hierauf die Richtung von Osten nach Westen und endlich die Richtung des Lothes oder des Erdhalbmessers von oben nach unten gerechnet. Alsdann hat man um die Componenten, welche bezüglich durch X, Y, Z bezeichnet werden mögen, durch die Inclination i, die Declination δ und die magnetische Erdkraft T oder auch umgekehrt darzustellen:

$$tang\,\delta = \frac{Y}{X},\; tang\,i = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}},\quad T = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Die Componenten lassen sich bekanntlich als partielle Differentialquotienten des Potentials darstellen, und zwar ist, wenn dx, dy, dz die Incremente der Länge nach den Richtungen der Componenten darstellen:

$$X = -\frac{dV}{dx},\; Y = -\frac{dV}{dy},\; Z = -\frac{dV}{dz}.$$

Nun ist aber für jeden Punkt auf der Oberfläche $t = R$ und

$$dx = -R\,d\varphi,\; dy = -R\sin\varphi\; d\theta,\; dz = -dt.$$

Hieraus folgt:

$$X = \sum_1^\infty \frac{dP_n}{d\varphi},\; Y = \frac{1}{\sin\varphi}\sum_1^\infty \frac{dP_n}{d\theta},\; Z = -\sum_1^\infty (n+1)\,P_n.$$

Für die Coefficienten P sind folgende Ausdrücke zu setzen:

$$\begin{aligned}
P_1 &= g_{1,0}\; B_{1,0} \\
&\quad + g_{1,1}\,(A_{1,1}\sin\theta + B_{1,1}\cos\theta). \\
P_2 &= g_{2,0}\; B_{2,0} \\
&\quad + g_{2,1}\,(A_{2,1}\sin\theta + B_{2,1}\cos\theta) \\
&\quad + g_{2,2}\,(A_{2,2}\sin 2\theta + B_{2,2}\cos 2\theta). \\
P_3 &= g_{3,0}\; B_{3,0} \\
&\quad + g_{3,1}\,(A_{3,1}\sin\theta + B_{3,1}\cos\theta) \\
&\quad + g_{3,2}\,(A_{3,2}\sin 2\theta + B_{3,2}\cos 2\theta) \\
&\quad + g_{3,3}\,(A_{3,3}\sin 3\theta + B_{3,3}\cos 3\theta).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4 = {} & g_{4,0}\, B_{4,0} \\ & + g_{4,1}\,(A_{4,1} \sin\theta + B_{4,1} \cos\theta) \\ & + g_{4,2}\,(A_{4,2} \sin 2\theta + B_{4,2} \cos 2\theta) \\ & + g_{4,3}\,(A_{4,3} \sin 3\theta + B_{4,3} \cos 3\theta) \\ & + g_{4,4}\,(A_{4,4} \sin 4\theta + B_{4,4} \cos 4\theta) \end{aligned}$$

etc. etc.

Die in diesen Formeln durch g bezeichneten Ausdrücke sind folgende:

$$\begin{array}{lll} g_{1,0} = \cos\varphi & g_{2,0} = \cos\varphi^2 - \frac{1}{3} & g_{3,0} = \cos\varphi^3 - \frac{3}{5}\cos\varphi \\ g_{1,1} = \sin\varphi & g_{2,1} = \cos\varphi\,\sin\varphi & g_{3,1} = (\cos\varphi^2 - \frac{1}{5})\sin\varphi \\ & g_{2,2} = \sin\varphi^2 & g_{3,2} = \cos\varphi\,\sin\varphi^2 \\ & & g_{3,3} = \sin\varphi^3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} g_{4,0} &= \cos\varphi^4 - \tfrac{6}{7}\cos\varphi^2 + \tfrac{3}{35} \\ g_{4,1} &= (\cos\varphi^3 - \tfrac{3}{7}\cos\varphi)\sin\varphi \\ g_{4,2} &= (\cos\varphi^2 - \tfrac{1}{7})\sin\varphi^2 \\ g_{4,3} &= \cos\varphi\,\sin\varphi^3 \\ g_{4,4} &= \sin\varphi^4 \end{aligned}$$

etc.

Hiernach findet man durch Substitution:

$$X = \sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\sum_{k=i}^{k=\infty}\frac{d g_{k,i}}{d\varphi}A_{k,i}\right)\sin i\theta$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{d g_{k,0}}{d\varphi}B_{k,0} + \sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\sum_{k=i}^{k=\infty}\frac{d g_{k,i}}{d\varphi}B_{k,i}\right)\cos i\theta.$$

$$Y = -\sum_{i=1}^{i=\infty} i\left(\sum_{k=i}^{k=\infty}\frac{g_{k,i}}{\sin\varphi}B_{k,i}\right)\sin i\theta + \sum_{i=1}^{i=\infty} i\left(\sum_{k=i}^{k=\infty}\frac{g_{k,i}}{\sin\varphi}A_{k,i}\right)\cos i\theta.$$

$$Z = -\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\sum_{k=i}^{k=\infty}(k+1)\,g_{k,i}A_{k,i}\right)\sin i\theta - \sum_{k=1}^{k=\infty}(k+1)\,g_{k,0}B_{k,0}$$

$$-\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\sum_{k=i}^{k=\infty}(k+1)\,g_{k,i}B_{k,i}\right)\cos i\theta.$$

Die Vergleichung obiger Ausdrücke mit den durch Beobachtung gefundenen Werthen der Componenten führt nun zu den verlangten Werthen der Coefficienten A und B. Diese Vergleichung lässt sich aber, ohne dass man auf grosse Schwierigkeiten stösst, wie folgt bewerkstelligen.

Indem man die Componenten für eine hinreichende Anzahl gleich weit von einander entfernter Orte eines und desselben Parallelkreises zu Grunde legt, bilde man die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen der Länge fortschreitenden Reihen, welche den Verlauf der Componenten auf jenem Parallelkreis darstellen. Bedeutet f eine solche Componente, so hat man, insofern f stetig verläuft, für alle Werthe von θ zwischen 0 und 2π und für diese Grenzen selbst:

$$f = A_1 \sin\theta + A_2 \sin 2\theta + A_3 \sin 3\theta + \cdots\cdots + \tfrac{1}{2} B_0 + B_1 \cos\theta + B_2 \cos 2\theta + \cdots\cdots$$

Die Coefficienten dieser Entwicklung aber, nämlich:

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f \sin m\theta \, d\theta, \quad B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f \cos m\theta \, d\theta,$$

lassen sich ohne Schwierigkeit annähernd mittelst der gewählten und der Beobachtung entnommenen Werthe von f berechnen. Auf diese Weise werde nun gefunden:

$$X = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_{x,i} \sin i\theta + \tfrac{1}{2} B_{x,0} + \sum_{i=1}^{i=\infty} B_{x,i} \cos i\theta,$$

$$Y = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_{y,i} \sin i\theta + \tfrac{1}{2} B_{y,0} + \sum_{i=1}^{i=\infty} B_{y,i} \cos i\theta,$$

$$Z = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_{z,i} \sin i\theta + \tfrac{1}{2} B_{z,0} + \sum_{i=1}^{i=\infty} B_{z,i} \cos i\theta.$$

Man hat alsdann, wie die Vergleichung ergiebt:

$$1. \quad \sum_{k=i}^{k=\infty} \frac{dg_{k,i}}{d\varphi} A_{k,i} = A_{x,i}, \qquad 4. \quad -i \sum_{k=i}^{k=\infty} \frac{g_{k,i}}{\sin\varphi} B_{k,i} = A_{y,i},$$

$$2. \quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{dg_{k,0}}{d\varphi} B_{k,0} = \tfrac{1}{2} B_{x,0}, \qquad 5. \quad 0 = \tfrac{1}{2} B_{y,0},$$

$$3. \quad \sum_{k=i}^{k=\infty} \frac{dg_{k,i}}{d\varphi} B_{k,i} = B_{x,i}, \qquad 6. \quad i \sum_{k=i}^{k=\infty} \frac{g_{k,i}}{\sin\varphi} A_{k,i} = B_{y,i},$$

$$7. \quad -\sum_{k=i}^{k=\infty} (k+1) g_{k,i} A_{k,i} = A_{z,i},$$

$$8. \quad -\sum_{k=1}^{k=\infty}(k+1)\,g_{k,0}\,B_{k,0} = \tfrac{1}{2}B_{z,0},$$

$$9. \quad -\sum_{k=i}^{k=\infty}(k+1)\,g_{k,i}\,B_{k,i} = B_{z,i}.$$

Die fünfte der obigen Gleichungen kann zur Bestimmung der Coefficienten A und B nicht dienen, es müssen aber auf dem Parallelkreise so viele Punkte oder Oerter in Rechnung gezogen werden, dass eben jene Gleichung wenigstens annähernd erfüllt wird.

Die obigen Gleichungen mögen nun für eine Anzahl N Parallelkreise gebildet werden, und es mögen von den Coefficienten P etwa n berücksichtigt werden. Alsdann hat man $2N$ Gleichungen von den Formen 2 und 8 mit den Grössen $B_{1,0}\,B_{2,0} \cdots\cdots B_{n,0}$. Ferner ergeben sich einerseits aus 1, 6, 7 und andererseits aus 3, 4, 9 je $3N$ Gleichungen für jede der folgenden zusammengestellten Gruppen der Coefficienten A und B:

$$\begin{matrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \ldots\ldots A_{n,1} \\ & A_{2,2} & A_{3,2} \ldots\ldots A_{n,2} \\ & & A_{3,3} \ldots\ldots A_{n,3} \\ & & \vdots \\ & & A_{n,n} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} \ldots\ldots B_{n,1} \\ & B_{2,2} & B_{3,2} \ldots\ldots B_{n,2} \\ & & B_{3,3} \ldots\ldots B_{n,3} \\ & & \vdots \\ & & B_{n,n} \end{matrix}$$

Aus den so gewonnenen Gleichungen sind endlich die Coefficienten A und B mittelst der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen, wobei, wie leicht ersichtlich, die grösste Zahl der Unbekannten in den linearen Endgleichungen n ist.

Auf dem oben auseinander gesetzten Wege hat Gauss (Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838, von Gauss und Weber. 1839) die 24 Constanten der 4 ersten P-Coefficienten, welche für eine erste Annäherung hinreichen, berechnet. Derselbe legte der Rechnung die Daten von 84 Oertern zu Grunde, die zu je 12 auf 7 Parallelkreisen liegen, und entnahm jene Daten aus der Sabine'schen Karte für die ganze Intensität (im siebenten *Report of the British association for the advancement of science*), aus der Barlow'schen Karte für die Declination (*Philosophical transactions* 1833) und aus der Hor-

ner'schen Karte für die Inclination (Gehler's physikalisches Wörterbuch, Band 6). Gauss rechnete die geographischen Längen ostwärts von dem Meridiane von Greenwich; ferner nahm er die Intensität für London = 1372 an und gab dem Potential in der Gegend des Nordpoles das positive Vorzeichen. Die Gauss'schen Coefficienten bedürfen also, wenn wir unsere bisherigen Einheiten beibehalten wollen, einer Modification. Es betrug aber für die in Betracht kommende Zeit die Intensität in Göttingen 1357, wenn die in London gleich 1372 gesetzt wurde, während sich für dieselbe Intensität aus den im Juli 1834 gemachten Beobachtungen bei Zugrundelegung der von uns angewandten Einheiten der Werth 0,47414 ableitete. Hiernach müssen wir die Gauss'schen Coefficienten mit der Zahl 0,47414 : 1357 d. i. 0,00034941 multipliciren und ihr Zeichen umkehren, um die von uns durch A und B bezeichneten Coefficienten zu erhalten. Wir lassen die mit umgekehrtem Vorzeichen genommenen Gauss'schen Coefficienten d. i. also die durch die letztgenannte Zahl dividirten Coefficienten A und B hier folgen:

Index	A : 0,00034941	B : 0,00034941
1,0		− 925,782
1,1	+ 178,744	− 89,024
2,0		+ 22,059
2,1	+ 6,030	+ 144,913
2,2	+ 39,010	− 0,493
3,0		+ 18,868
3,1	− 47,794	− 122,936
3,2	+ 22,766	+ 73,193
3,3	+ 18,750	− 1,396
4,0		+ 108,855
4,1	− 64,112	+ 152,589
4,2	− 42,573	+ 45,791
4,3	+ 0,178	− 19,774
4,4	− 3,175	− 4,127

Um die Berechnung der Componenten des Erdmagnetismus für einen gegebenen Ort zu erleichtern, hat Gauss a. a. O.

Hülfstafeln mitgetheilt, deren Anwendung aus Folgendem erhellen wird. Wie die vorhergehenden Betrachtungen ersehen lassen, kann man setzen:

$$X = a^0 + a' \cos(\theta + A') + a'' \cos(2\theta + A'') + a''' \cos(3\theta + A''') + a^{IV} \cos(4\theta + A^{IV}),$$

$$Y = b' \cos(\theta + B') + b'' \cos(2\theta + B'') + b''' \cos(3\theta + B''') + b^{IV} \cos(4\theta + B^{IV}),$$

$$Z = c^0 + c' \cos(\theta + C') + c'' \cos(2\theta + C'') + c''' \cos(3\theta + C''') + c^{IV} \cos(4\theta + C^{IV}),$$

und es sind alsdann die Coefficienten a, b, c, sowie die Hülfswinkel A, B, C lediglich Functionen der geographischen Breite. In den gedachten Tafeln findet man nun für die einzelnen Breitegrade die Werthe von a^0, c^0 und den Hülfswinkeln A', B', C' etc. sowie endlich die Logarithmen der Coefficienten a', b', c' etc. ausgerechnet vor, so dass die Componenten und folglich auch die Declination, Inclination und Intensität mit grosser Leichtigkeit ermittelt werden können.

Die theoretischen Formeln stellen die Verhältnisse des Erdmagnetismus mit einer Genauigkeit dar, welche für eine erste Annäherung und mit Rücksicht auf das zu Grunde gelegte Material als eine sehr befriedigende angesehen werden muss. Wir verweisen wegen dieses Punktes auf den 1840 erschienenen Atlas des Erdmagnetismus von Gauss und Weber.

Zum Schlusse mögen hier noch einige Worte über die von Gauss sogenannten Gleichgewichtslinien und die ideale Vertheilung der magnetischen Fluida auf der Erdoberfläche gesagt werden. Unter den Gleichgewichtslinien, welche für Erlangung eines leichten Ueberblicks über die Verhältnisse des Erdmagnetismus von Bedeutung sind, versteht man die Linien, in welchen die Oberfläche der Erde von den Gleichgewichtsflächen des magnetischen Potentials geschnitten wird; in allen Punkten einer solchen Linie weist also das Potential einen und denselben Werth auf. Die Gleichgewichtslinien sind in sich selbst zurücklaufende Curven, von denen keine eine andere schneidet. Sowohl nach Norden als nach Süden hin ziehen sich diese Linien zusammen, um schliesslich bezüglich in den magnetischen Nord- oder Südpol überzugehen. In jedem Punkte der Erde

steht die Richtung der magnetischen Kraft auf der durch den Punkt gehenden Gleichgewichtslinie senkrecht. Das Potential ist auf einer gewissen mittleren in der Gegend des Aequators um die Erde herumlaufenden Gleichgewichtslinie gleich Null, nördlich von dieser Linie negativ, nach Süden hin positiv und sein absoluter Werth nimmt, wenn man von der gedachten Linie aus nach dem magnetischen Nord- oder Südpole fortschreitet, an Grösse zu, um auf jedem dieser Pole ein Maximum zu werden. Die Werthe des Potentials werden aber dem Früheren zufolge mittelst der Formel:

$$\frac{V}{R} = \sum_{1}^{\infty} P_n$$

gefunden.

Wie früher bemerkt wurde, lässt sich die magnetische Wirkung der Erde in dem ausserhalb derselben befindlichen Raume auf eine gewisse ideale Vertheilung gleicher Massen nördlichen und südlichen Fluidums über die Oberfläche der Erde zurückführen. Für die Flächendichtigkeit dieser oberflächlichen magnetischen Ladung hat man (siehe Elektrostatik IV. 2. a.) den Ausdruck:

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{V}{R} + 2\frac{dV}{dt}\right),$$

wo $\frac{d\cdot\cdot}{dt}$ eine Differentiation nach der auswärts gerechneten Normale bedeutet. Offenbar kann man aber für obigen Ausdruck auch schreiben:

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{V}{R} + 2Z\right) = \frac{1}{4\pi}\sum_{1}^{\infty}(2n+1)P_n.$$

Das magnetische Potential der Erde nähert sich mit wachsender Entfernung von letzterer der Grenze:

$$\frac{P_1 R^3}{t^2} = \frac{R^3}{t^2}\{B_{1,0}\cos\varphi + (A_{1,1}\sin\theta + B_{1,1}\cos\theta)\sin\varphi\}.$$

Bestimmen wir die Grössen φ', θ' und N so, dass

$$N\cos\varphi' = B_{1,0},\ N\sin\varphi'\sin\theta' = A_{1,1},\ N\sin\varphi'\cos\theta' = B_{1,1}$$

wird, und setzen wir ferner:

$$\cos(\theta - \theta')\sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi' = \cos\delta,\ NR^3 = M,$$

so ergiebt sich für das Potential:

$$\frac{M \cos \delta}{t^2}.$$

Die Grösse M ist das magnetische Moment der Erde, und φ', θ' sind die Winkelcoordinaten desjenigen Halbmessers, welcher mit ihrer magnetischen Axe parallel läuft, letztere in der Richtung von dem Schwerpunkte der südlich magnetischen Massen nach dem Schwerpunkte der nördlich magnetischen Massen gerechnet. Die Ausrechnung liefert:

$$M = 8{,}5 . 10^{25},\ \varphi' = 12^0\,10',\ \theta' = 296^0\,29'.$$

III.

VON DER INDUCTION DES MAGNETISMUS IM ALLGEMEINEN.

1. Lehnsatz aus der Elektrostatik.

Der Lehre von der magnetischen Induction legen wir einen in die Elektrostatik gehörenden Satz zu Grunde, welcher wie folgt lautet:

Das Potential der Ladung, welche von einer in einem Punkte P_1 concentrirten elektrischen Masse auf einem abgeleiteten oder isolirten Conductor inducirt wird, hat in einem Punkte P_2 denselben Werth, welchen das Potential der Ladung, die von einer gleichen aber in dem Punkte P_2 concentrirten Masse hervorgerufen wird, in dem Punkte P_1 aufweist, wofern die genannten Punkte entweder beide ausserhalb des Conductors liegen oder beide in einer Höhlung desselben sich befinden.

Die Richtigkeit obigen Satzes möge erstlich für den Fall erwiesen werden, wo der Conductor abgeleitet ist und die zur Sprache kommenden Punkte P_1 und P_2 beide ausserhalb des Conductors liegen. Für die inducirende Masse nehmen wir, ohne die Allgemeinheit des Resultats zu beeinträchtigen, die positive Einheit. Das äussere Potential der Ladung, welche von der Masse hervorgerufen wird, wenn sie im Punkte P_1 liegt, sei $V_1(x, y, z)$, und die Dichtigkeit der Ladung, welche dieselbe Masse hervorruft, wenn sie in P_2 liegt, sei ϱ_2. Man hat alsdann nach einem Satze der Elektrostatik (IV. 1.):

$$V_1(x_2, y_2, z_2) = -\int \varrho_2 V_1(x, y, z)\, ds,$$

wo x_2, y_2, z_2 die Coordinaten des Punktes P_2, x, y, z die des Elementes ds der Oberfläche des Leiters bedeuten, und wo das rechts stehende Integral über sämmtliche Elemente dieser Oberfläche auszudehnen ist.

Wenn aber die Entfernung vom Punkte P_1 durch r_1 bezeichnet wird, so hat man, da der Conductor abgeleitet ist, für alle Punkte des letzteren:

$$V_1(x, y, z) + \frac{1}{r_1} = 0.$$

Es ist also auch:

$$V_1(x_2, y_2, z_2) = \int \frac{\varrho_2\, ds}{r_1}.$$

Das hier rechter Hand stehende Integral ist nichts anderes als das Potential der von P_2 ausgehenden Ladung für den Punkt P_1, und hieraus erhellet der Satz. Wird jenes Potential durch $V_2(x, y, z)$ bezeichnet, so kann man also auch schreiben:

$$V_1(x_2, y_2, z_2) = V_2(x_1, y_1, z_1).$$

Es werde zweitens unterstellt, der Conductor sei isolirt. Wie früher seien V_1 und V_2 die Potentiale der Ladungen, welche von der Masse Eins inducirt werden, wenn sie bezüglich in dem Punkte P_1 oder in dem Punkte P_2 liegt. Ferner seien U_1 und U_2 die Potentiale der Ladungen, welche von derselben Masse in denselben Lagen, aber für den Fall, dass der Conductor abgeleitet ist, inducirt werden; die diesen letzteren Ladungen entsprechenden Dichtigkeiten seien bezüglich ϱ_1 und ϱ_2.

Wenn die Masse im Punkt P_1 sich befindet, so besteht die Ladung aus einem gebundenen (nicht ableitbaren) Theile mit der Dichtigkeit ϱ_1, dem Potentiale U_1 und aus einem freien (ableitbaren) Theile. Das Quantum dieses zweiten Theiles ist $-\int \varrho_1\, ds$ und sein Potential im Innern des Conductors $-c\int \varrho_1\, ds$, wenn c das innere Potential einer freien Ladung von der Quantität Eins ist. Wir haben also zufolge des bereits im ersten Falle angewandten Satzes:

$$\begin{aligned} V_1(x_2, y_2, z_2) &= -\int \varrho_2\, V_1(x, y, z)\, ds \\ &= -\int \varrho_2 \left\{ U_1(x, y, z) - c\int \varrho_1\, ds \right\} ds. \end{aligned}$$

Da ferner auch in der ganzen Ausdehnung des Conductors

$$U_1(x, y, z) + \frac{1}{r_1} = 0$$

ist, so hat man, wenn noch die Quanta $\int \varrho_1 \, ds$, $\int \varrho_2 \, ds$ bezüglich durch q_1 und q_2 bezeichnet werden:

$$V_1(x_2, y_2, z_2) = \int \frac{\varrho_2 \, ds}{r_1} + c \, q_1 \, q_2.$$

Ebenso findet man:

$$V_2(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{\varrho_1 \, ds}{r_2} + c \, q_1 \, q_2.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich aber mit Rücksicht auf den vorhergehenden Fall:

$$V_1(x_2, y_2, z_2) = V_2(x_1, y_1, z_1).$$

Der Beweis des Satzes für den Fall, wo beide Punkte P in einer Höhlung eines Conductors liegen, kann aus dem Vorhergehenden leicht entnommen werden.

Aus dem mitgetheilten Satze ergiebt sich für das Potential der durch einen Punkt inducirten Ladung die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass es seinen Werth nicht ändert, wenn man in ihm die Coordinaten des inducirenden Punktes mit den Coordinaten des Punktes, auf den es sich bezieht, vertauscht, hierbei unterstellt, dass die genannten Punkte entweder beide ausserhalb oder beide in einer Höhlung des Conductors liegen. Es sei nämlich $V(x_1, y_1, z_1; x, y, z)$ das Potential der Ladung, welche von dem Punkte P_1 mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1 inducirt wird, und zwar für einen Punkt (x, y, z), der zugleich mit P_1 ausserhalb oder innerhalb einer Höhlung des Conductors liegt. Dieselbe Grösse für den in demselben Raume mit P_1 befindlichen inducirenden Punkt P_2 mit den Coordinaten x_2, y_2, z_2 ist alsdann $V(x_2, y_2, z_2; x, y, z)$. Dem Vorhergehenden zufolge ist nun:

$$V(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) = V(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1),$$

woraus die Richtigkeit der gemachten Bemerkung erhellet.

Zur Verification der im Obigen gewonnenen Resultate betrachten wir den sphärischen Conductor. Ausserhalb eines solchen mit dem Radius R liege der Punkt P_1 mit der Masse Eins, um T_1 vom Mittelpunkte entfernt. Das elektrische Bild des

Punktes hat die Masse $- R : T_1$, und wenn T_1^1 seine Entfernung vom Mittelpunkte bedeutet, so ist:

$$T_1 T_1^1 = R^2.$$

Für einen Punkt P, der ebenfalls ausserhalb des isolirten Conductors in der Entfernung T vom Mittelpunkte liegt, ist alsdann das Potential der durch P_1 inducirten Ladung, wenn S die Entfernung des Punktes P von dem genannten elektrischen Bilde bedeutet:

$$- \frac{R}{T_1} \cdot \frac{1}{S} + \frac{R}{T_1} \cdot \frac{1}{T}.$$

Für letzteren Ausdruck erhält man aber, wenn man die Länge S durch die Radii vectores der Punkte P und P_1 und den von letzteren gebildeten Winkel δ ausdrückt:

$$\frac{-R}{\sqrt{R^4 - 2 R^2 T T_1 \cos \delta + T^2 T_1^2}} + \frac{R}{T T_1},$$

ein Ausdruck, dessen beide Theile, wie man leicht einsieht, in Bezug auf die Coordinaten der Punkte P und P_1 symmetrisch gebaut sind.

Liegen die Punkte P und P_1 in der sphärischen Höhlung eines Conductors, so hat man für das von P_1 inducirte Potential im Punkte P:

$$\frac{-R}{\sqrt{R^4 - 2 R^2 T T_1 \cos \delta + T^2 T_1^2}} + c,$$

wo c den Werth des inneren Potentials der Ladung bedeutet, welche das Quantum Eins auf der äusseren Grenzfläche des Conductors erzeugt. Auch hier ist also das Potential der inducirten Ladung in Bezug auf die Coordinaten der Punkte P und P_1 symmetrisch gebaut. Ein Gleiches gilt endlich auch für jeden der beiden betrachteten Fälle, wenn der Conductor abgeleitet ist, indem sich alsdann jeder der beiden gefundenen Potentialausdrücke auf das erste Glied zurückzieht.

Der abgehandelte Satz behält, wie aus seinem Beweise leicht zu entnehmen, auch dann noch seine Gültigkeit, wenn an die Stelle eines einzelnen Conductors ein System von beliebig vielen Conductoren tritt. In der hierdurch erzielten allgemeinen Form findet er seine Anwendung in der Theorie der magnetischen Induction, denn die Körper, welche, wie absolut

weiches Eisen, der Trennung und Wiedervereinigung der magnetischen Fluida kein Hinderniss entgegensetzen, betrachten wir als aus kleinsten Theilchen zusammengesetzt, die sich gegen die magnetischen Fluida gerade ebenso verhalten, wie isolirte Conductoren gegen die elektrischen Fluida. Das Potential der magnetischen Ladung, welche von einem Magnetpole in einem magnetisch erregbaren Körper hervorgerufen wird, ist sonach eine in Bezug auf die Coordinaten des Poles und die laufenden Coordinaten symmetrisch gebaute Function.

2. Magnetische Induction in einem einzelnen Körperelemente. Verhalten eines beliebig gestalteten Körpers im homogenen magnetischen Felde.

Das Potential eines Magneten hat für solche Punkte, gegen deren Entfernungen die Dimensionen des Magneten verschwinden, die Form:

$$\frac{M \cos \delta}{R^2},$$

wo M das magnetische Moment des Magneten, R die Länge der Linie bedeutet, welche irgend einen Punkt des Magneten mit dem Punkte verbindet, auf den sich das Potential bezieht, und wo endlich δ der Winkel ist, den die eben gedachte Linie mit der Verbindungslinie des Südpoles und des Nordpoles einschliesst (s. II. 2.).

Auch das Potential des in einem einzelnen Körperelemente durch einen Magnetpol inducirten Magnetismus wird für jeden Punkt, der in einer nicht verschwindend kleinen Entfernung von dem Elemente liegt, unter die angegebene Form fallen. Dasselbe setzen wir ferner der Energie des inducirenden Poles proportional, was wenigstens, wie wir sehen werden, für schwächere scheidende Kräfte gestattet ist. Führen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen Axen durch das Element gehen, so hat man für das Potential des erregten Elementes:

$$u = \frac{Q}{r^3}(xA + yB + zC),$$

wo zu setzen ist:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

wo Q das in dem Pole enthaltene magnetische Quantum bedeutet und wo die Coefficienten A, B, C, sobald das Coordinatensystem einmal fixirt ist, nur von der Lage des inducirenden Poles abhängen.

Die Coordinaten des Poles seien nun x', y', z', seine Entfernung vom Elemente sei r'; alsdann hat man dem unter 1. abgehandelten Satze zufolge:

$$r'^3\big(xA[x', y', z'] + yB[x', y', z'] + zC[x', y', z']\big) =$$
$$r^3\big(x'A[x, y, z] + y'B[x, y, z] + z'C[x, y, z]\big).$$

Wir schliessen aus dieser letzteren Gleichung, dass die Ausdrücke:

$$r^3 A[x, y, z],\ r^3 B[x, y, z],\ r^3 C[x, y, z]$$

ganze homogene Functionen ersten Grades der Coordinaten x, y, z sind und setzen daher für dieselben bezüglich:

$$ax + c'y + b'z,\ by + a'z + c''x,\ cz + b'x + a''y.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die letzte Gleichung liefert dann ferner noch:

$$a' = a'',\ b' = b'',\ c' = c''$$

und mit Rücksicht hierauf kommt endlich:

$$u = \frac{Q}{r^3 r'^3}\big(axx' + byy' + czz' + a'[y'z + yz'] +$$
$$b'[x'z + xz'] + c'[x'y + xy']\big),$$

wo die Coefficienten $a, b, c\ldots$ ganz unabhängig von dem inducirenden Pole sind und lediglich durch die Natur, Form und Grösse des erregten Elementes sowie durch seine Lage gegen die Coordinatenaxen bestimmt werden.

Der Ausdruck u kann, wie aus der Lehre von den Flächen zweiten Grades bekannt ist, auf eine einfachere Form gebracht werden. Indem man nämlich das Coordinatensystem um seinen Anfangspunkt in eine gewisse lediglich von der Natur und Form des Elementes abhängige Lage dreht, geht der fragliche Ausdruck in den folgenden über:

$$u = -\frac{Q}{r^3 r'^3}\left(\frac{x x'}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y y'}{\mathfrak{b}^2} + \frac{z z'}{\mathfrak{c}^2}\right).$$

Hierfür kann man aber auch, wenn das Potential $\frac{Q}{r'}$ des inducirenden Poles durch $v(x, y, z)$ bezeichnet wird, schreiben:

$$u = \frac{1}{r^3}\left\{\frac{x}{\mathfrak{a}^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 + \frac{y}{\mathfrak{b}^2}\left(\frac{dv}{dy}\right)_0 + \frac{z}{\mathfrak{c}^2}\left(\frac{dv}{dz}\right)_0\right\},$$

wo die Marke 0 andeutet, dass die auf die Lage des Elementes (den Coordinaten-Anfangspunkt) bezüglichen Werthe der Differentialquotienten zu nehmen sind.

Die letzte Formel lässt sich sofort auf den allgemeinsten Fall ausdehnen, wo die vertheilende Kraft nicht von einem einzelnen Punkte ausgeht, sondern von einem beliebigen permanenten Magneten oder einem Systeme von constanten elektrischen Strömen (s. d. 3. Theil). Bezeichnen wir das Potential des Inducenten oder, kürzer ausgedrückt, das inducirende Potential durch $V(x, y, z)$, so hat man für das Potential des erregten Elementes:

$$u = \frac{1}{r^3}\left\{\frac{x}{\mathfrak{a}^2}\left(\frac{dV}{dx}\right)_0 + \frac{y}{\mathfrak{b}^2}\left(\frac{dV}{dy}\right)_0 + \frac{z}{\mathfrak{c}^2}\left(\frac{dV}{dz}\right)_0\right\}.$$

Den drei letzten Formeln liegt ein Coordinatensystem zu Grunde, dessen Axen durch das inducirte Element gehen und gegen letzteres ausserdem noch eine bestimmte Lage haben. Um nun eine von der absoluten Lage des Coordinatensystems unabhängige Formel zu gewinnen, verschieben wir das ursprüngliche System, ohne jedoch die Richtung der Axen zu ändern, und suchen den entsprechenden Ausdruck für das Potential. Man findet so, wenn jetzt die Coordinaten des Elementes durch x', y', z', die des Punktes, auf den sich das Potential bezieht, durch x, y, z bezeichnet werden:

$$u = -\left\{\frac{1}{\mathfrak{a}^2}\cdot\frac{dV}{dx'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'} + \frac{1}{\mathfrak{b}^2}\cdot\frac{dV}{dy'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'} + \frac{1}{\mathfrak{c}^2}\cdot\frac{dV}{dz'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'}\right\},$$

wo zu setzen ist:

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

und wo $\frac{dV}{dx'}$ etc. die Werthe der partiellen Differentialquotien-

ten des inducirenden Potentiales nach den Coordinaten für den Punkt sind, in welchem das Element liegt.

Aus den im Vorhergehenden gewonnenen Resultaten lässt sich leicht das Verhalten eines beliebig gestalteten Körpers von endlichen Dimensionen in einem homogenen magnetischen Felde ableiten. Ein Körper werde der Einwirkung eines Poles mit dem magnetischen Quantum Q, den Coordinaten x', y', z' und dem Leitstrahle r' ausgesetzt. Man verschiebe den Pol nach irgend einer Richtung ins Unendliche. Alsdann nähern sich seine Kraftlinien dem Parallelismus und zugleich nähert sich offenbar das magnetische Potential des Körpers für Punkte, deren Entfernungen von irgend einem Punkte des Körpers mit der des Poles vergleichbar sind, einem Ausdrucke, welcher eben so gebaut ist, wie das Potential eines Elementes, das durch einen im Endlichen gelegenen Pol erregt wird, für Punkte, die im Endlichen liegen. Geben wir also den Coordinatenaxen die gehörigen, durch die Form und Natur des Körpers bestimmten Richtungen, so nähert sich das Potential des im Körper inducirten Magnetismus für einen Punkt mit den Coordinaten x, y, z und dem mit r' vergleichbaren Leitstrahle r dem Ausdrucke:

$$u = -\frac{Q}{r^3 r'^3}\left(\frac{xx'}{\mathfrak{a}^2} + \frac{yy'}{\mathfrak{b}^2} + \frac{zz'}{\mathfrak{c}^2}\right),$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei endliche von der Form, Grösse und Beschaffenheit des Körpers abhängige Grössen sind.

Die Componenten der Kraft, mit welcher der influencirte Körper rückwärts auf den Pol einwirkt, sind den mit $-Q$ multiplicirten Werthen gleich, welche die Differentialquotienten von u nach x, y, z im Pole, d. i. in dem Punkte (x', y', z'), annehmen; so erhält man für die mit der x-Axe parallele Componente:

$$X = \frac{Q^2}{r'^6}\cdot\frac{x'}{\mathfrak{a}^2} - \frac{3\,Q^2 x'}{r'^8}\left(\frac{x'^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y'^2}{\mathfrak{b}^2} + \frac{z'^2}{\mathfrak{c}^2}\right),$$

und analoge Ausdrücke ergeben sich für die beiden Componenten Y und Z.

Die Kraft, mit welcher der Pol auf den Körper einwirkt, ist aber der soeben erwähnten Kraft entgegengesetzt gleich. Sie kann also ersetzt werden durch eine im Anfangspunkte angreifende Kraft mit den Componenten $-X$ u. s. w. und ein

Gegenpaar mit den Componenten $\Xi = Yz' - Zy'$ u. s. f. Während nun der Pol ins Unendliche rückt, möge zugleich das Quantum Q über alle Grenzen hinaus wachsen, so zwar, dass die Anziehung desselben im Endlichen, d. i. der Ausdruck $\frac{Q}{r'^2}$, einen endlichen Werth K bewahrt. In Folge dessen wird schliesslich die im Anfangspunkte angreifende Kraft verschwinden und die Wirkung des Poles auf den influencirten Körper — welcher letztere sich jetzt in einem homogenen Felde mit der Kraft K befindet — wird lediglich durch das gedachte Gegenpaar dargestellt. Was aber das letztere selbst betrifft, so hat man, wenn λ, μ, ν die Winkel sind, welche der Radius vector des Poles oder die Kraftlinien des homogenen Feldes mit den Coordinatenaxen einschliessen:

$$\Xi = K^2\left(\frac{1}{\mathfrak{b}^2} - \frac{1}{\mathfrak{c}^2}\right)\cos\mu\cos\nu,\quad \mathrm{H} = K^2\left(\frac{1}{\mathfrak{c}^2} - \frac{1}{\mathfrak{a}^2}\right)\cos\nu\cos\lambda,$$

$$\mathrm{Z} = K^2\left(\frac{1}{\mathfrak{a}^2} - \frac{1}{\mathfrak{b}^2}\right)\cos\lambda\cos\mu.$$

In sehr einfacher Weise lassen sich Richtung und Grösse des Gegenpaares mit Hülfe einer centrischen Fläche zweiten Grades darstellen, deren Axen in die durch den Körper bestimmten Richtungen der oben gebrauchten Coordinatenaxen fallen und mit den Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ proportional sind. Wegen dieses Gegenstandes, sowie wegen der Gleichgewichtslagen, die es in jedem Falle giebt, möge der Körper frei oder um einen Punkt oder um eine Axe drehbar sein, verweisen wir den Leser auf die folgende Untersuchung über das Verhalten eines Ellipsoides im homogenen magnetischen Felde.

Litteratur: Green, Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. Band XXXIX, XLIV, XLVII.

W. Thomson, On the equilibrium of magnetic or diamagnetic bodies of any form under the influence of the terrestrial magnetic force. Report of the British association. 1848.

IV.

MAGNETISCHE INDUCTION IN EINEM ISOTROPEN KÖRPER.

1. Allgemeine Formeln.

Wenn ein Körper der Einwirkung eines Inducenten ausgesetzt wird, so können wir uns den schliesslichen Zustand als Folge einer Reihe von successiven Inductionsacten denken. In einem ersten Acte ruft der Inducent in jedem einzelnen Molecüle denjenigen magnetischen Zustand hervor, wie er eintreten würde, wenn auf das einzelne Molecül nur der Inducent, nicht aber zugleich auch der Magnetismus einwirkte, welcher in den übrigen Molecülen auftritt. Es folgt hierauf der zweite Inductionsact, wobei das einzelne Molecül durch den Magnetismus erregt wird, welcher durch den ersten Inductionsact bereits in allen übrigen Molecülen hervorgerufen wurde, hierbei wiederum von dem erst in eben diesem zweiten Acte auftretenden Magnetismus abgesehen. In dem dritten Inductionsacte wird das einzelne Molecül weiterhin durch den Magnetismus inducirt, welcher durch den zweiten Act in allen übrigen Molecülen erzeugt wurde, u. s. f.

Bei homogenen Körpern, die wir hier nur ins Auge fassen, ist das Potential des in einem Elemente inducirten Magnetismus, wenn die Molecüle nicht auf einander einwirken, unter übrigens gleichen Umständen dem Volumen des Elementes proportional und von dessen Form und Lage im Körper unabhängig. Mit Rücksicht auf III. 2. lässt sich also das Potential, wie

folgt, darstellen, wenn den Coordinatenaxen die gehörige durch den Bau des Körpers bedingte Richtung gegeben wird:

$$-\left\{\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dV}{dx'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}+\frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{dV}{dy'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'}+\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{dV}{dz'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'}\right\}dk.$$

Hier bedeutet aber dk das Volumen des Elementes, die Grössen α, β, γ sind lediglich von der Beschaffenheit des Körpers abhängig und von endlicher Grösse. Die Buchstaben r und V haben dieselbe Bedeutung wie in III. 2. und wie dort sind die Differentialquotienten zu bilden.

Da in einem isotropen Körper keine Richtung vor einer anderen ausgezeichnet ist, so sind für einen solchen die drei Constanten α, β, γ einander gleich zu setzen, und erhält man für den letzten Ausdruck:

$$-\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{dV}{dx'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}+\frac{dV}{dy'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'}+\frac{dV}{dz'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'}\right\}dk.$$

Es werde nun durch $\frac{d\ldots}{dN}$ eine Differentiation nach der Normale der zu V gehörigen Gleichgewichtsflächen angedeutet, ebenso durch $\frac{d\ldots}{d\mathrm{N}}$ eine solche nach der Normale der zu $\frac{1}{r}$ gehörigen Gleichgewichtsflächen, hierbei den Punkt (x, y, z) als Centrum der r gedacht. Ferner sei δ der Winkel, unter welchem sich die durch das Element gehenden Gleichgewichtsflächen von V und $\frac{1}{r}$ schneiden. Alsdann kann man für den letzten Ausdruck auch schreiben:

$$-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dV}{dN}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}}\cos\delta\, dk,$$

wo sich die Differentialquotienten auf das Element beziehen.

Durch den letzten Ausdruck, das Potential des im einzelnen Elemente ohne Wechselwirkung der Molecüle von dem Potential V inducirten Magnetismus, findet sich der magnetische Zustand des Körpers, wie er nach dem ersten Inductionsacte auftritt, vollkommen bestimmt. Ins Besondere hat man für das Potential des ganzen Körpers nach jenem Acte:

$$S = -\frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dV}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN} \cos\delta \, dk,$$

wo sich das Integral über sämmtliche Elemente des Körpers erstreckt.

Es fragt sich jetzt, in welcher Weise der beim ersten Inductions-Acte erzeugte Magnetismus auf das einzelne Molecül während des zweiten Inductionsactes einwirkt. Um einen beliebigen Punkt eines Molecüles beschreibe man eine Kugel mit einem sehr kleinen Radius. Das Volumenelement dieser Hülfsfläche werde durch dk' bezeichnet. Man hat alsdann für das Potential, welches von den ausserhalb der Kugel gelegenen Molecülen im Innern jener Fläche erzeugt wird:

$$-\frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dV}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN} \cos\delta \, dk + \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dV}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN} \cos\delta \, dk',$$

wo sich das erste Integral über sämmtliche Elemente des Körpers, das zweite über sämmtliche Elemente der Hülfskugel erstreckt. Indem wir nun den Radius der Hülfskugel an Grösse abnehmen lassen, nähert sich offenbar der letzte Ausdruck dem Potential der Wirkung, welche die durch den ersten Inductionsact magnetisirten und ausserhalb des betrachteten Molecüles gelegenen Theilchen des Körpers auf jenes während des zweiten Inductionsactes ausüben. Man bemerke nun, dass das Gefälle des Potentiales V innerhalb der verschwindend kleinen Hülfskugel als constant betrachtet werden kann und deshalb für den zweiten Theil des obigen Ausdruckes gesetzt werden kann:

$$-\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{dV}{dN}\int \frac{\cos\delta}{r^2} \, dk'.$$

Das hier auftretende Integral stellt die nach der auswärts gerichteten Normale von V genommene Componente der Anziehung dar, welche die Hülfskugel, wenn sie mit Masse von der Dichtigkeit Eins ausgefüllt wäre, auf die Masse Eins ausüben würde, letztere in den Punkt concentrirt gedacht, auf welchen sich das fragliche Potential bezieht, und hierbei ausserdem unterstellt, dass die Attractions-Constante gleich Eins sei. Deshalb fällt der letzte Ausdruck, wie man leicht findet, mit dem Ausdrucke:

$$\frac{4\pi}{3\alpha^2} \cdot \frac{dV}{dN} N$$

zusammen, wo N die Entfernung von der durch das Centrum der gedachten Kugel gehenden Niveaufläche des Potentiales V bedeutet, diese Entfernung positiv gerechnet für die ausserhalb und negativ für die innerhalb der Niveaufläche gelegenen Punkte. Sowohl die Niveauflächen, wie auch das Gefälle der letztgefundenen Potential-Function sind für die Ausdehnung der Hülfskugel dieselben, wie die der Function $\frac{4\pi}{3\alpha^2} V$. Für die Wirkung im Innern des Molecüles können wir also das Potential des ausserhalb des Molecüles befindlichen magnetischen Fluidums durch das folgende ersetzen:

$$V_1 = -\frac{1}{\alpha^2} \int \frac{dV}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN} \cos\delta \, dk + \frac{4\pi}{3\alpha^2} V.$$

Dies Potential spielt nun in dem zweiten Inductionsacte genau dieselbe Rolle, wie das Potential V des Inducenten im ersten. In dem einzelnen Körperelemente wird also ferner Magnetismus erregt, dessen Potential

$$-\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{dV_1}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN} \cos\delta \, dk$$

ist, während man für das Potential des im ganzen Körper weiterhin erzeugten Magnetismus hat:

$$S_1 = -\frac{1}{\alpha^2} \int \frac{dV_1}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN} \cos\delta \, dk.$$

Der Uebergang vom zweiten Inductionsact zum dritten, der vom dritten zum vierten u. s. f. ist offenbar genau derselbe, wie der vom ersten zum zweiten, und bestimmt sich daher der endliche Gleichgewichtszustand wie folgt.

In dem durch das Potential V influencirten Körper tritt ein magnetischer Zustand ein, wie er auch einträte, wenn eine gegenseitige Einwirkung der Molecüle nicht stattfände und das einzelne Element dem folgenden Potentiale ausgesetzt würde:

$$1. \quad U = V + V_1 + V_2 + \cdots + C = \sum_0^\infty V_\nu + C,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet, in dem Summensymbole V_0 für V gesetzt ist, und wo die Bildung der einzelnen Glieder durch folgende Formel bestimmt wird:

$$V_\nu = -\frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dV_{\nu-1}}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}} \cos\delta\, dk + \frac{4\pi}{3\alpha^2} V_{\nu-1},$$

oder mit Rücksicht auf den Green'schen Satz (Elektrost. II), und wenn ds das Element der Oberfläche des inducirten Körpers ist, $\frac{d\ldots}{dn}$ aber eine Differentiation nach der auswärts gerichteten Normale dieses Elementes andeutet:

$$V_\nu = -\frac{1}{\alpha^2}\int \frac{\frac{dV_{\nu-1}}{dn}}{r}\, ds + \frac{4\pi}{3\alpha^2} V_{\nu-1}.$$

Für das Potential des inducirten Magnetismus hat man:

$$T = S + S_1 + S_2 + \cdots = \sum_0^\infty S_\nu,$$

wo S_0 mit S zusammenfällt, eine Constante nicht auftritt — da die Gesammtmenge des inducirten Magnetismus gleich Null ist und das Potential im Unendlichen verschwinden muss — und wo endlich die Bildung der einzelnen Glieder durch folgende Formel bestimmt wird:

$$S_\nu = -\frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dV_\nu}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}} \cos\delta\, dk,$$

oder mit Rücksicht auf den angezogenen Satz aus der Elektrostatik:

$$S_\nu = -\frac{1}{\alpha^2}\int \frac{\frac{dV_\nu}{dn}}{r}\, ds.$$

Zwischen den Potentialen U und T, von welchen jenes den magnetischen Zustand des Körpers, letzteres die Wirkung des inducirten Magnetismus bestimmt, besteht die in folgender Gleichung ausgesprochene einfache Beziehung:

$$2.\quad T = -\frac{1}{\alpha^2}\int \frac{\frac{dU}{dn}}{r}\,ds.$$

Wir ersehen hieraus, dass die Wirkung des inducirten Magnetismus sich ersetzen lässt durch die einer oberflächlichen magnetischen Ladung, für deren Dichtigkeit man hat:

$$3.\quad \varrho = -\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{dn}.$$

Diese ideale Ladung besteht aus gleichen Mengen nördlichen und südlichen Fluidums, indem der Ausdruck $\Delta^2 U$ für alle Punkte des Körpers verschwindet und folglich auch das Integral $\int \frac{dU}{dn} ds$ gleich Null ist. Auch die Abhängigkeit der Function U von dem inducirenden Potentiale V ist nach dem Obigen leicht conciser zu formuliren. Indem man nämlich in dem Ausdrucke für U an die Stelle von V_1, V_2 u. s. w. die durch das oben mitgetheilte recurrente Gesetz bestimmten Ausdrücke setzt, findet man:

$$4.\quad V + \left(\frac{4\pi}{3\alpha^2} - 1\right) U - \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{\frac{dU}{dn}}{r}\,ds + C = 0.$$

Dem Potentiale U kann eine von der oben gefundenen verschiedene Form gegeben werden, die dadurch bemerkenswerth ist, dass aus ihr das Verhältniss zwischen der magnetischen und der gewöhnlichen elektrischen Induction leicht erkannt werden kann. Nach einem Zusatze des in der Elektrostatik II. bewiesenen Green'schen Satzes hat man:

$$4\pi V = \int \frac{\frac{dV}{dn}}{r}\,ds - \int V\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\,ds.$$

Es ist also auch:

$$V_1 = -\frac{1}{\alpha^2}\int \frac{\frac{dV}{dn}}{r}\,ds + \frac{4\pi}{3\alpha^2}V = -\frac{8\pi}{3\alpha^2}V - \frac{1}{\alpha^2}\int V\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\,ds,$$

oder:

$$V_1 = -\lambda V - \lambda'\int ds\cdot\frac{d\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{dn}\,V,$$

wenn man

$$\frac{8\pi}{3\alpha^2} = \lambda \text{ und } \frac{4\pi}{\alpha^2} = \lambda'$$

setzt.

Aus dem letzten Resultate folgt ferner:

$$V_2 = -\lambda V_1 - \lambda' \int ds \cdot \frac{d\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{dn} V_1,$$

oder, wenn für V_1 sein gefundener Werth gesetzt wird:

$$V_2 = \lambda^2 V + 2\lambda\lambda' \int ds \cdot \frac{d\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{dn} V$$

$$+ \lambda'^2 \int ds \cdot \frac{d\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{dn} \int ds \cdot \frac{d\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{dn} V.$$

Ebenso findet man:

$$V_3 = -\lambda^3 V - 3\lambda^2\lambda' \int ds \cdot \frac{d\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{dn} V$$

$$- 3\lambda\lambda'^2 \int ds \cdot \frac{d\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{dn} \int ds \cdot \frac{d\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{dn} V$$

$$- \lambda'^3 \int ds \cdot \frac{d\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{dn} \int ds \cdot \frac{d\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{dn} \int ds \cdot \frac{d\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{dn} V$$

u. s. f.

Substituirt man jetzt die für V_1, V_2, V_3 u. s. w. gefundenen Ausdrücke in den für U, so kommt:

$$\begin{aligned} U = C &+ V\ (1 - \lambda + \lambda^2 - \cdots\cdots) \\ &+ V'\ (1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - \cdots\cdots)\lambda' \\ &+ V''(1 - 3\lambda + 6\lambda^2 - \cdots\cdots)\lambda'^2 \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wo die Functionen V', V'' u. s. w. nach dem recurrenten Gesetze:

$$V^{(\nu)} = -\int V^{(\nu-1)} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}{dn} ds = V^{(\nu-1)} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\frac{d V^{(\nu-1)}}{dn}}{r} ds$$

gebildet und mithin dieselben sind, wie die gleich bezeichneten Functionen im vierten Kapitel der Elektrostatik. Wir bilden nun endlich die Summe der in U auftretenden Reihen und finden:

$$(1.)\quad U = \frac{3-2\varkappa}{3}(V + \varkappa V' + \varkappa^2 V'' + \cdots) + C$$

$$= \frac{3-2\varkappa}{3}\sum_0^\infty \varkappa^\nu V^{(\nu)} + C,$$

wo $\varkappa$ eine von α abhängige Constante bedeutet, für welche man hat:

$$\varkappa = \frac{\frac{4\pi}{\alpha^2}}{1 + \frac{8\pi}{3\alpha^2}},$$

oder:

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{3\varkappa}{3-2\varkappa}.$$

Man hat ferner noch:

$$(2.)\quad T = -\frac{3\varkappa}{4\pi(3-2\varkappa)}\int \frac{\frac{dU}{dn}}{r}\,ds$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\sum_0^\infty \varkappa^{\nu+1}\frac{dV^{(\nu)}}{dn}}{r}\,ds,$$

$$(3.)\quad \varrho = -\frac{3\varkappa}{4\pi(3-2\varkappa)} \cdot \frac{dU}{dn} = -\frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty \varkappa^{\nu+1}\frac{dV^{(\nu)}}{dn},$$

$$(4.)\quad (3-2\varkappa)V - 3(1-\varkappa)U - \frac{3\varkappa}{4\pi}\int \frac{\frac{dU}{dn}}{r}\,ds = constans.$$

Ausdrücklich muss hier hervorgehoben werden, dass von den letzten Formeln nur insofern eine Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit zu erwarten ist, als von der magnetischen Wirkung der in sehr grosser Nähe an der Oberfläche gelegenen Theile des Körpers abgesehen werden darf, indem hier das, was oben über die Verhältnisse in der angewandten, verschwindend kleinen Hülfskugel gesagt wurde, nicht mehr gilt. Solches wird aber in der That bei festen Körpern mit endlichen Dimensionen offenbar gestattet sein.

Die vorhergehenden Betrachtungen wollen wir jetzt dadurch vervollständigen, dass wir nachweisen, wie auch aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht des inducirten Magnetismus hergeleitet werden kann. Jenem Principe zufolge müssen für den Fall des Gleichgewichtes die Glieder erster Dimension in der Variation des halben Potentiales des gesammten in Betracht kommenden Magnetismus in Bezug auf sich selbst verschwinden, indem sie der negativen Arbeit, welche die magnetischen Kräfte bei der Variation leisten, gleichkommen. Um nun den veränderlichen Theil jenes halben Potentiales, auf welchen es offenbar allein ankommt, zu bestimmen, ermitteln wir zunächst das Differential desselben, welches sich auf den Magnetismus, der in einem verschwindend kleinen Elemente dk' von sphärischer Gestalt enthalten ist, bezieht. Dieses Differential besteht erstens aus dem Potential des Inducenten, zweitens dem halben Potential der ausserhalb des Elementes befindlichen Theile des magnetisirten Körpers, endlich drittens dem halben Potentiale des in dem Elemente enthaltenen Magnetismus in Bezug auf diesen Magnetismus selbst. Durch U werde wie früher die Function bezeichnet, durch welche sich die Magnetisirung des Körpers in der bekannten Weise darstellen lässt, da denn in der ganzen Ausdehnung des letzteren der Ausdruck $\Delta^2 U$ verschwindet, weil in jedem Elemente entgegengesetzt gleiche Mengen Magnetismus auftreten müssen. Wenn dann ferner durch dq ein Element der inducirenden magnetischen Massen, durch r seine Entfernung von dk' bezeichnet wird, so ist das Potential von dq in Bezug auf dk', da es dem Potential von dk' in Bezug auf dq gleichkommt:

$$-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}}\cdot cos\,\delta\,.\,dk'\,.\,dq = -\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathfrak{N}}\cdot dk'.dq,$$

wo $\mathfrak{N}$ die Normale der Niveaufläche von U, N die Normale der Niveaufläche von $\frac{dq}{r}$ und δ den Winkel zwischen diesen Normalen bedeutet. Hiernach kommt für das Potential des Inducenten in Bezug auf dk', wenn wie früher V das Potential des Inducenten darstellt:

$$1.\quad -\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\frac{dV}{d\mathfrak{N}}\cdot dk'.$$

Das Potential der Elemente des magnetisirten Körpers, welche ausserhalb dk' liegen, für einen im Inneren dieses Elementes gelegenen Punkt ist, wie wir früher sahen:

$$-\frac{1}{\alpha^2}\int\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathfrak{N}}\cdot dk+\frac{4\pi}{3\alpha^2}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\mathfrak{N},$$

wo die Integration sich über alle Elemente des Körpers erstreckt. Da nun aber die Summe der in dk' entwickelten magnetischen Quanta stets verschwindet, so kann der letzte Ausdruck bei der Bildung des Potentiales der Elemente ausserhalb dk' in Bezug auf dk' durch den Ausdruck:

$$-\frac{1}{\alpha^2}\int\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathfrak{N}}\cdot dk+\frac{4\pi}{3\alpha^2}U=\mathrm{V}$$

ersetzt werden, so dass sich für die Hälfte des letztgenannten Potentials ergiebt:

$$2.\quad -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\frac{d\mathrm{V}}{d\mathfrak{N}}\cdot dk'.$$

Das Potential des in dk' enthaltenen Magnetismus in Bezug auf sich selbst kommt gleich dem Potential $-U$ in Bezug auf denselben Magnetismus. Es sei nämlich U' das Potential der magnetischen Ladungen, welche durch das Potential U auf den einzelnen Conductoren erzeugt werden, aus denen wir uns ein Element des Körpers zusammengesetzt denken. Man hat alsdann für die Punkte irgend eines jener Conductoren, unter c eine Constante verstanden:

$$U+U'=c.$$

Wenn nun $d\sigma$ ein Oberflächenelement dieses Conductors, ϱ' die Dichtigkeit der auf ihm befindlichen magnetischen Ladung bedeutet, so ist das Potential des in dem ganzen Elemente enthaltenen Magnetismus in Bezug auf die Ladung des betrachteten Conductors:

$$\int U'\varrho'd\sigma=\int(c-U)\varrho'd\sigma=c\int\varrho'd\sigma-\int U\varrho'd\sigma.$$

Hieraus folgt, da $\int\varrho' d\sigma$ gleich Null ist, dass das Potential des

im Elemente enthaltenen Magnetismus in Bezug auf diesen selbst dem Potentiale $-U$ in Bezug auf denselben Magnetismus gleichkommt. Für das halbe Potential des in dk' entwickelten Magnetismus in Bezug auf sich selbst kommt also:

$$3.\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot dk'.$$

Durch Addition der Ausdrücke 1., 2. und 3. ergiebt sich jetzt für das auf das Element dk' sich beziehende gesuchte Differential:

$$-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\frac{d(V+\frac{1}{2}\mathrm{V}-\frac{1}{2}U)}{d\mathfrak{N}}\cdot dk',$$

und hieraus schliessen wir auf folgenden Ausdruck für den veränderlichen Theil W des halben Potentiales des gesammten in Betracht kommenden Magnetismus in Bezug auf sich selbst:

$$W=\int-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\frac{d(V+\frac{1}{2}\mathrm{V}-\frac{1}{2}U)}{d\mathfrak{N}}\cdot dk,$$

wo das Integral über sämmtliche Elemente des influencirten Körpers auszudehnen ist.

Um dem Ausdrucke W eine für unsern Zweck bequemere Form zu geben, schreiben wir im Hinblick auf einen bekannten Satz und mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise:

$$\int-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\frac{d(V+\frac{1}{2}\mathrm{V}-\frac{1}{2}U)}{d\mathfrak{N}}dk$$

$$=\int-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{dn}(V+\tfrac{1}{2}\mathrm{V}-\tfrac{1}{2}U)ds=\int(V+\tfrac{1}{2}\mathrm{V}-\tfrac{1}{2}U)\varrho\, ds,$$

sowie ferner:

$$\int-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathfrak{N}}\cdot dk=\int\frac{-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{dn}}{r}ds=\int\frac{\varrho\, ds}{r}=T;$$

alsdann kommt:

$$W=\int\left\{V+\tfrac{1}{2}T+\tfrac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3\alpha^2}-1\right)U\right\}\varrho\, ds.$$

Die Variation des letzten Ausdruckes muss nun für den Fall des magnetischen Gleichgewichtes bei jeder Variation δU der Function U, für die der Ausdruck $\Delta^2(\delta U)$ im Inneren des magnetisirten Körpers gleich Null ist, verschwinden. Es ist aber:

$$\delta W=\int\left\{V\delta\varrho+\tfrac{1}{2}(T\delta\varrho+\varrho\,\delta T)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3\alpha^2}-1\right)(U\delta\varrho+\varrho\,\delta U)\right\}ds.$$

Ferner hat man:

$$\int T\delta\varrho\,ds = \int \varrho\,\delta T ds,$$

und wenn $\mathfrak{N}_1$ die Normale der zu δU gehörenden Niveaufläche, δ_1 den Winkel zwischen den Normalen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_1$ bedeutet, so ist:

$$\int \varrho\,\delta U ds = -\frac{1}{\alpha_2}\int \frac{dU}{dn}\delta U ds = -\frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dU}{d\mathfrak{N}}\cdot\frac{d\delta U}{d\mathfrak{N}_1}\cos\delta_1\,dk$$

$$= -\frac{1}{\alpha^2}\int U\cdot\frac{d\delta U}{dn}ds = \int U\delta\varrho\,ds.$$

Hiernach muss für den Fall des Gleichgewichtes, unter $\delta\varrho$ die Variation der Dichtigkeit der idealen Oberflächenladung, wie sie einer beliebigen zulässigen Variation der Function U entspricht, verstanden, sein:

$$\delta W = \int \left(V + T + \left(\frac{4\pi}{3\alpha^2} - 1\right)U\right\}\delta\varrho\,ds = 0.$$

Es folgt aber hieraus endlich, dass für die Oberfläche und folglich auch für die ganze Ausdehnung des magnetisirten Körpers sein müsse:

$$V + T + \left(\frac{4\pi}{3\alpha^2} - 1\right)U = const.,$$

welches die früher schon gefundene Bedingungsgleichung für das magnetische Gleichgewicht ist.

Die Magnetismen, welche in einem Körper inducirt werden, erleiden sowohl seitens des Inducenten, als auch seitens des im Körper selbst enthaltenen Magnetismus eine Einwirkung, welche sich auf die Masse des Körpers überträgt. Es halten sich aber offenbar die Kräfte, welche aus der gegenseitigen Einwirkung der magnetischen Quanta im influencirten Körper selbst hervorgehen, für sich am Körper das Gleichgewicht. Das mechanische Verhalten des Körpers wird also lediglich durch die Einwirkung des Inducenten auf den entwickelten Magnetismus des Körpers bedingt. Die Kräfte endlich, welche diese Einwirkung darstellen, halten den Kräften, welche die Einwirkung des magnetisirten Körpers auf den Inducenten darstellen, das Gleichgewicht, bestimmen sich daher ohne Weiteres durch das Potential T und werden auch erhalten, indem man die Einwirkung des Inducenten auf die ideale Oberflächenladung des in-

fluencirten Körpers ermittelt. Dies muss sich auch ergeben, wenn wir im Anschluss an die letzten Betrachtungen das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auf die im magnetisirten Körper thätigen magnetischen Kräfte und diejenigen Kräfte anwenden, welche jenen das Gleichgewicht zu halten und somit die Bewegung, welche der Körper im Allgemeinen in Folge der entwickelten magnetischen Kräfte annehmen würde, zu verhindern im Stande sind. In der That muss dem genannten Principe zufolge für den Fall des Gleichgewichtes der genannten Kräfte die Summe der Arbeit, welche letztere bei einer unendlich kleinen, mit der Art der Beweglichkeit des festen Körpers verträglichen, übrigens aber beliebigen Versetzung (d. i. Verschiebung oder Drehung oder Verschiebung und Drehung) leisten, verschwinden, wenn bloss das Unendlich-Kleine erster Ordnung berücksichtigt wird. Die Arbeit sämmtlicher magnetischer Kräfte ist aber gleich der Variation des halben Potentiales des gesammten Magnetismus in Bezug auf sich selbst, also gleich

$$\int\left\{\tfrac{1}{2}V' + \tfrac{1}{2}\left[V' + T' + \left(\frac{4\pi}{3\alpha^2} - 1\right)U'\right]\right\}\varrho' ds$$
$$- \int\left\{\tfrac{1}{2}V + \tfrac{1}{2}\left[V + T + \left(\frac{4\pi}{3\alpha^2} - 1\right)U\right]\right\}\varrho\, ds,$$

wenn V' u. s. f. die Werthe bedeuten, welche V u. s. f. bei der neuen Lage des Körpers annehmen. Berücksichtigen wir die Bedingung für das magnetische Gleichgewicht, sowie, dass die Gesammt-Quantität der idealen Oberflächenladung stets gleich Null ist, so ergiebt sich für den letzten Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2}\int (V'\varrho' - V\varrho)\, ds = \tfrac{1}{2}\delta\int V\varrho\, ds.$$

Hiernach kommt, wenn P eine der Kräfte ist, welche den magnetischen Kräften am Körper das Gleichgewicht halten, und wenn $P\,\delta p$ das virtuelle Moment dieser Kraft bedeutet:

$$\tfrac{1}{2}\delta\int V\varrho\, ds + \Sigma P\,\delta p = 0.$$

Für letztere Gleichung kann man auch schreiben:

$$\int \varrho\,\delta V ds + \Sigma P\delta p = 0,$$

woraus erhellt, dass sich die mechanische Wirkung auf die

Masse des Körpers ergiebt, wenn man die Wirkung des Inducenten auf die ideale Oberflächenladung des influencirten Körpers, solche fest mit letzterem verbunden gedacht, bestimmt.

Der Zusammenhang der beiden letzten Gleichungen ergiebt sich wie folgt. Es sei für die Punkte des magnetisirten Körpers:

$$V + T + \left(\frac{4\pi}{3\alpha^2} - 1\right) U = c, \quad V' + T' + \left(\frac{4\pi}{3\alpha^2} - 1\right) U' = c'.$$

Alsdann ist:

$$\int \varrho\, \delta V ds = \int \varrho \left\{ (c' - c) - \delta T - \left(\frac{4\pi}{3\alpha^2} - 1\right) \delta U \right\} ds,$$

oder, da man:

$$\int \varrho\, \delta T ds = \int T \delta \varrho\, ds \quad \text{und} \quad \int \varrho\, \delta U ds = \int U \delta \varrho\, ds$$

hat, und da $\int \varrho\, ds$ verschwindet:

$$\int \varrho\, \delta V ds = - \int \left\{ T + \left(\frac{4\pi}{3\alpha^2} - 1\right) U \right\} \delta \varrho\, ds,$$

woraus sich, da auch $\int \delta \varrho\, ds$ verschwindet, ergiebt:

$$\int \varrho\, \delta V ds = \int V \delta \varrho\, ds.$$

Bevor wir die im Obigen entwickelte Theorie der magnetischen Induction in isotropen festen Körpern auf eine Reihe specieller Fälle anwenden, wollen wir noch einer bemerkenswerthen Form der Bedingungsgleichung für das magnetische Gleichgewicht, sowie auch eines bemerkenswerthen Ausdruckes für die Dichtigkeit der idealen Oberflächenladung gedenken. Beide sind namentlich für die Vergleichung der magnetischen und elektrischen Induction von Interesse.

Wie bisher durch $\frac{d\,..}{dn}$ eine Differentiation nach der auswärts gerichteten Normale der Oberfläche des magnetisirten Körpers bezeichnet wurde, so möge ferner auch durch $\frac{d\,..}{dn'}$ eine solche nach der einwärts gerichteten Normale angedeutet werden. Man hat alsdann nach einem bekannten Satze:

$$-4\pi\varrho = \frac{dT}{dn} + \frac{dT}{dn'} = \frac{d(V+T)}{dn} + \frac{d(V+T)}{dn'}.$$

Es ergiebt sich hieraus mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung für das magnetische Gleichgewicht:

$$-4\pi\varrho = \frac{d(V+T)}{dn} - \left(\frac{4\pi}{3\alpha^2} - 1\right)\frac{dU}{dn'}.$$

Da ferner

$$\varrho = -\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{dU}{dn} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{dU}{dn'},$$

so folgt, wenn noch statt der Constante α die Constante $\varkappa$ eingeführt wird, für die Punkte der Oberfläche:

$$(1-\varkappa)\frac{d(V+T)}{dn} + \frac{d(V+T)}{dn'} = 0.$$

In dem ersten Gliede dieser Gleichung bezieht sich aber T auf Punkte ausserhalb, in dem zweiten auf Punkte innerhalb des influencirten Körpers.

Aus den oben für ϱ aufgeführten Ausdrücken endlich findet man sofort:

$$-4\pi\varrho = \varkappa\frac{d(V+T)}{dn}.$$

Es möge noch hier die Bemerkung Platz finden, dass der Zusammenhang zwischen der von uns durch $\varkappa$ bezeichneten Constante und der von Poisson, dem Begründer der Inductionstheorie, in den folgends citirten Abhandlungen durch k bezeichneten Grösse sich, wie folgt, darstellt:

$$\varkappa = \frac{3k}{1+2k}, \quad k = \frac{\varkappa}{3-2\varkappa}.$$

Litteratur. Poisson. Mémoire 1 et 2 sur la théorie du magnetisme. Mémoires de l'académie des sciences. Années 1821 et 1822.

W. Thomson. On the mathematical theory of electricity in equilibrium. Philos. Magaz. 4. Ser. Vol. VIII.

2. Magnetische Induction in einer Kugel.

a. Induction in einer Vollkugel.

Wenn eine Kugel der Wirkung eines ausserhalb derselben gelegenen Inducenten ausgesetzt wird, so lässt sich das Potential des letzteren, welches durch V bezeichnet werden möge, nach steigenden positiven ganzen Potenzen von $t : R$ entwickeln, unter t die Entfernung vom Mittelpunkte, unter R den Radius der Kugel verstanden, und ein Gleiches gilt auch für das zur Bestimmung des magnetischen Zustandes dienende Potential U, denn, wie aus der allgemeinen Theorie erhellt, verschwindet der Ausdruck $\Delta^2 U$ in der ganzen Ausdehnung der Kugel. Wir können also setzen:

$$V = \sum_0^\infty P_n \left(\frac{t}{R}\right)^n, \quad U = \sum_0^\infty Q_n \left(\frac{t}{R}\right)^n,$$

wo die Coefficienten P_n und Q_n Functionen der gewöhnlichen Polar-Coordinaten-Winkel φ und θ sind. Um nun die Coefficienten Q mittelst der Gleichung (4.) zu bestimmen, haben wir vor allem das in dieser Gleichung auftretende Integral zu bilden. Man hat aber für die Entfernung r eines im Innern der Kugel gelegenen Punktes von einem Punkte der Oberfläche:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sum_0^\infty p_n \left(\frac{t}{R}\right)^n,$$

wo die Coefficienten p_n mit denen der Entwicklung von $(1 - 2\,t \cos\delta + t^2)^{-1/2}$ zusammenfallen, unter δ den Winkel verstanden, welchen die nach den Endpunkten von r gezogenen Leitstrahlen miteinander bilden. Hiernach hat man, da die Differentiation nach der auswärts gerechneten Normale mit der Differentiation nach t zusammenfällt, für das fragliche Integral:

$$\int \frac{\frac{dU}{dt}}{r}\, ds = \frac{1}{R^2} \int \left\{\sum_0^\infty n\, Q_n\right\} \left\{\sum_0^\infty p_n \left(\frac{t}{R}\right)^n\right\} ds.$$

Zu Folge eines Theoremes aus der Lehre von den Kugelfunctionen kann man hierfür schreiben (s. Elektrost. IV. 2. a.):

$$\int \frac{\frac{dU}{dt}}{r}\,ds = 4\pi \sum_0^\infty \frac{n}{2n+1} Q_n \left(\frac{t}{R}\right)^n.$$

Es werde jetzt die letzte Entwicklung sowie die für V und U in die Gleichung (4.) eingesetzt. Alsdann müssen, da letztere für jeden Punkt der Kugel gilt, die einzelnen Coefficienten der Potenzen von t verschwinden und zwar für jeden Werth von φ und θ. Es ist mithin für jeden von Null verschiedenen Index:

$$Q_n = \frac{(3-2\varkappa)(2n+1)}{3\{n\varkappa + (2n+1)(1-\varkappa)\}} P_n;$$

folglich hat man, wenn von der willkürlichen Constante abgesehen wird:

$$U = \frac{3-2\varkappa}{3} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{2n+1-(n+1)\varkappa} P_n \left(\frac{t}{R}\right)^n.$$

Derselbe Weg, welcher oben bei Berechnung des in der Gleichung (4.) auftretenden Integrales eingeschlagen wurde, führt hier auch zur Entwicklung des Potentiales T, nur hat man hier zu setzen:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{t} \sum_0^\infty p_n \left(\frac{R}{t}\right)^n.$$

Man findet so:

$$T = -\varkappa \sum_1^\infty \frac{n}{2n+1-(n+1)\varkappa} P_n \left(\frac{R}{t}\right)^{n+1}.$$

Die obigen allgemeinen Formeln mögen jetzt auf einige bestimmte Annahmen über das inducirende Potential angewandt werden.

α) Verhalten einer Kugel im homogenen magnetischen Felde.

Machen wir die Annahme:

$$V = Kt\cos\varphi,$$

so werden die Kraftlinien des inducirenden Potentiales gerade und demjenigen Radius der Kugel, von dem an die Winkel φ gerechnet werden, parallel; die vertheilende Kraft, auf die positive Einheit

des magnetischen Fluidums wirkend gedacht, hat die Grösse K. In der Entwicklung von V hat man:

$$P_0 = 0, \quad P_1 = K\,R\cos\varphi, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0 \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt:

$$U = V,$$

so dass also das einzelne Element denselben magnetischen Zustand erlangt, wie wenn es bloss für sich dem Inducenten ausgesetzt wäre und eine gegenseitige Einwirkung der Molecüle nicht stattfände. Der Inductionsprocess ist also hier schon mit dem ersten Acte zu Ende.

Man erhält ferner für das äussere Potential der inducirten Kugel:

$$T = -\frac{\varkappa}{3 - 2\varkappa} \cdot \frac{K R^3 \cos\varphi}{t^2}.$$

Für die Dichtigkeit der idealen magnetischen Ladung, welche über die Oberfläche ausgebreitet denselben Effect nach aussen hin, wie die ganze Kugel, hat, kommt endlich:

$$\varrho = -\frac{3\varkappa}{4\pi(3 - 2\varkappa)} K \cos\varphi.$$

Das Potential T lässt ersehen, dass sich die Kugel nach aussen hin wie eine verschwindend kleine magnetische Nadel verhält, die im Mittelpunkte liegt, deren Axe den Kraftlinien parallel ist und deren Moment den Werth

$$\frac{\varkappa K R^3}{3 - 2\varkappa}$$

hat. Die Nadel kehrt nach der Seite, nach welcher das Potential V an Grösse zunimmt, ihren Südpol oder ihren Nordpol, je nachdem der Coefficient $\frac{\varkappa}{3 - 2\varkappa}$ positiv oder negativ ist. Bei denjenigen Körpern aber, die wir hier betrachten, ist jener Coefficient positiv. Es leuchtet nämlich ein, dass die Wirkung der Kugel nach aussen hin stets durch die eines Systemes von gleich grossen sphärischen Molecülen ersetzt werden kann, welche die magnetischen Flüssigkeiten vollkommen leiten und in dem Volumen der Kugel so vertheilt sind, dass weder eine Stelle noch eine Richtung vor einer anderen Stelle oder Richtung den Vorzug hat. Das Potential des in dem einzelnen Molecüle dieses Systems durch

das inducirende Potential hervorgerufenen Magnetismus ist aber (s. Elektrostatik IV. 2. b.):

$$-\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{K\cos\delta}{r^2}\cdot a,$$

wenn a das Volumen des Molecüles, r die Entfernung von demselben und δ den Winkel zwischen r und der Richtung der Kraft K bedeutet. Für das Potential des inducirten Elementes hat man also, wenn n die Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Molecüle bedeutet:

$$-\frac{3na}{4\pi}\cdot\frac{K\cos\delta}{r^2}dk;$$

folglich ist das Potential des ganzen Systemes:

$$-\frac{3naK}{4\pi}\int\frac{\cos\delta}{r^2}dk = -na\,.\,\frac{KR^3\cos\varphi}{t^2}.$$

Die Grösse na ist ihrer Bedeutung nach positiv und liegt zwischen 0 und 1; dasselbe gilt von der gleichen Grösse $\frac{\varkappa}{3-2\varkappa}$. Aus letzterem Resultate folgt ferner, dass auch $\varkappa$ bei den bisher betrachteten Körpern positiv ist und zwischen 0 und 1 liegt. Wenn $\varkappa$ gleich 0 wird, so verschwindet jegliche Induction und wenn es gleich Eins wird, so ist die ideale magnetische Oberflächenladung der elektrischen Ladung gleich, welche an der Oberfläche des Körpers, diese als leitend betrachtet, aufträte, wenn das inducirende Potential von elektrischen Massen herrührte.

Aus dem Potentiale T findet man unter anderen leicht für die Kraft K', womit die magnetisirte Kugel auf einen Nordpol im Punkte (t,φ) mit dem Quantum Eins einwirkt, und für den Winkel η, welchen jene Kraft mit der Verbindungslinie des Poles und des Mittelpunktes der Kugel bildet:

$$K' = \frac{A\sqrt{1+3\cos\varphi^2}}{t^3},\quad \cos\eta = \frac{2\cos\varphi}{\sqrt{1+3\cos\varphi^2}},$$

wo zu setzen ist:

$$A = \frac{\varkappa KR^3}{3-2\varkappa}.$$

Für die Componenten jener Kraft nach der Richtung vom Südpol zum Nordpol der Kugel und nach der auf der magnetischen Axe senkrechten Richtung ergiebt sich bezüglich:

$$A \cdot \frac{3\cos\varphi^2 - 1}{t^3} \text{ und } A \cdot \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{t^3}.$$

Hiernach ist es ferner leicht, die Wirkung der Kugel auf eine Magnetnadel von verschwindend kleiner Länge zu ermitteln.

Ueber das Verhalten einer Kugel im homogenen magnetischen Felde hat Barlow experimentelle Untersuchungen angestellt und in seinem Essay on magnetic attractions, 1823, veröffentlicht. (Mémoire 1. et 2. sur la théorie du magnetisme, par Poisson. Mémoires de l'académie des sciences. Années 1821 et 1822). Derselbe bestimmte die Wirkung, welche eine aus Eisen verfertigte Kugel in Folge des in ihr durch die Erde inducirten Magnetismus auf die horizontale Nadel einer Boussole bei verschiedenen Lagen der letzteren ausübte. Die Ablenkungen, welche Barlow bei grösseren Distanzen zwischen der Kugel und der Boussole beobachtete, sind nach Poisson stets grösser als die Ablenkungen, welche man mittelst des oben für T aufgestellten Ausdruckes berechnet, indem man die Länge der Nadel als verschwindend klein annimmt, von dem durch die Nadel erzeugten Magnetismus absieht, und die Constante $\varkappa$ — aus später anzugebenden Gründen — annähernd gleich Eins setzt. Die Differenz beträgt mitunter einen Grad und einige Minuten. Nichts destoweniger muss die Uebereinstimmung, welche sich im allgemeinen Verlaufe der beobachteten und berechneten Ablenkungen offenbart, als eine Bestätigung der Theorie angesehen werden.

β) Magnetisirung einer Kugel durch einen einzelnen Pol. Wechselwirkung zwischen einer Kugel und einer verschwindend kleinen Magnetnadel.

Die Polar-Coordinaten eines Poles, welcher das Quantum Q magnetischen Fluidums enthält, seien t', φ', θ'. Für das Potential desselben hat man alsdann:

$$V = \frac{Q}{\sqrt{t^2 - 2tt'\cos\delta + t'^2}} = \frac{Q}{R}\sum_0^\infty p_n \left(\frac{R}{t'}\right)^{n+1}\left(\frac{t}{R}\right)^n.$$

Hieraus ergiebt sich dem Vorhergehenden zufolge für das Potential des in der Kugel inducirten Magnetismus:

$$T = -\frac{\varkappa Q}{R}\sum_1^\infty \frac{n}{2n+1-(n+1)\varkappa} p_n \left(\frac{R}{t'}\right)^{n+1}\left(\frac{R}{t}\right)^{n+1}.$$

Für die Kraft, womit der Pol von der Kugel angezogen wird und umgekehrt, findet man, indem man bei der Berechnung der Einfachheit wegen $\varphi' = 0$ und $\theta' = 0$ setzt, den Werth

$$\frac{\varkappa Q^2}{R^2} \sum_1^\infty \frac{n(n+1)}{2n+1-(n+1)\varkappa} \left(\frac{R}{t'}\right)^{2n+3}.$$

Die hier auftretende Summe lässt sich wie folgt in geschlossener Form darstellen, wenn noch der Quotient $\frac{R}{t'}$ durch s bezeichnet wird:

$$\frac{1}{(2-\varkappa)^2}\left\{\frac{(3-\varkappa)s^5 - s^7}{(1-s^2)^2} - \frac{1-\varkappa}{2-\varkappa} s^{\frac{4-\varkappa}{2-\varkappa}} \int_0^{s^2} \frac{x^{\frac{1-\varkappa}{2-\varkappa}}}{1-x}\, dx\right\}.$$

Setzt man $\varkappa = 1$, so erhält man für die Anziehung

$$\frac{Q^2}{R^2} \cdot \frac{2s^5 - s^7}{(1-s^2)^2},$$

was mit dem Ausdrucke für die Anziehung eines elektrischen Poles seitens eines sphärischen isolirten Conductors zusammenfällt. Wenn $\varkappa$ sehr klein ist, kann man für die Anziehung setzen:

$$\frac{\varkappa Q^2}{4R^2}\left\{\frac{s^3+s^5}{(1-s^2)^2} - \frac{s^2}{2} \log \frac{1+s}{1-s}\right\}.$$

Es ist leicht, aus dem Obigen die Wechselwirkung zwischen einer verschwindend kleinen Magnetnadel und einer in ihrem Wirkungskreise befindlichen Kugel zu bestimmen. Offenbar liegen die Kräfte, wodurch die Wirkung der influencirten Kugel auf die Nadel dargestellt wird, in der durch die Axe der Nadel und den nach dieser hingehenden Radius bestimmten Ebene. Diese Ebene nehmen wir zur Fundamentalebene des Polar-Coordinaten-Systems. Ferner seien t', φ' die Polar-Coordinaten des Mittelpunktes der Nadel, λ die verschwindend kleine Länge der Nadel, ψ der in demselben Sinne wie φ gerechnete Winkel, welchen die Verbindungslinie des Süd- und Nordpoles mit dem Radius vector t' bildet, endlich M das magnetische Moment der Nadel. Bezeichnen wir dann durch $T\,(t', \varphi')$ das Potential des Magnetismus, welcher in der Kugel von dem Quantum Eins erzeugt wird, wenn solches in einem Punkte der Fundamentalebene mit den Coordinaten t', φ' liegt, so kommt nach dem Vorhergehenden für das Potential des von der Nadel inducirten Magnetismus:

$$\mathfrak{T} = \frac{M}{\lambda} T\left(t' + \frac{\lambda \cos\psi}{2}, \varphi' + \frac{\lambda \sin\psi}{2t'}\right)$$
$$- \frac{M}{\lambda} T\left(t' - \frac{\lambda \cos\psi}{2}, \varphi' - \frac{\lambda \sin\psi}{2t'}\right)$$
$$= M\left(\frac{dT}{dt'}\cos\psi + \frac{dT}{d\varphi'}\frac{\sin\psi}{t'}\right).$$

Die Ausrechnung liefert:

$$\mathfrak{T} = \frac{\varkappa M}{R^2}\sum_1^\infty C_n\left[(n+1)p_n\cos\psi - \frac{dp_n}{d\varphi'}\sin\psi\right]\left(\frac{R}{t'}\right)^{n+2}\left(\frac{R}{t}\right)^{n+1},$$

wo zu setzen ist:

$$C_n = \frac{n}{2n+1-(n+1)\varkappa},$$

und in p_n:

$$\cos\delta = \cos\varphi\cos\varphi' + \cos\theta\sin\varphi\sin\varphi'.$$

Es werde nun die Kraft, womit die influencirte Kugel auf einen Pol mit der Masse Eins im Punkte (t, φ) der Fundamentalebene einwirkt, zerlegt nach der Richtung des Radius vector t und senkrecht darauf nach der Seite hin, nach welcher die Wachsthümer von φ als positiv gerechnet werden. Die so gewonnenen Componenten, welche bezüglich durch X und Y bezeichnet werden mögen, sind:

$$X = -\frac{d\mathfrak{T}}{dt}$$
$$= \frac{\varkappa M}{R^3}\sum_1^\infty C_n\left((n+1)^2 p_n\cos\psi - (n+1)\frac{dp_n}{d\varphi'}\sin\psi\right)\left(\frac{R}{t'}\right)^{n+2}\left(\frac{R}{t}\right)^{n+2},$$
$$Y = -\frac{1}{t}\cdot\frac{d\mathfrak{T}}{d\varphi}$$
$$= -\frac{\varkappa M}{R^3}\sum_1^\infty C_n\left((n+1)\frac{dp_n}{d\varphi}\cos\psi - \frac{d^2p_n}{d\varphi\, d\varphi'}\sin\psi\right)\left(\frac{R}{t'}\right)^{n+2}\left(\frac{R}{t}\right)^{n+2},$$

wo jetzt in p_n für δ die Differenz $\varphi - \varphi'$ zu setzen ist, da $\theta = 0$ ist. Setzen wir in den letzten Ausdrücken nach Multiplication mit $\pm\frac{M}{\lambda}$ für t die Werthe $t' \pm \frac{\lambda\cos\psi}{2}$ und für φ die Werthe $\varphi' \pm \frac{\lambda\sin\psi}{2t'}$, so erhalten wir die Componenten der Kräfte, welche die Rückwirkung der influencirten Kugel auf die beiden Pole der Magnetnadel darstellen. Dieselbe Wirkung lässt sich aber auch

darstellen durch eine im Mittelpunkte der Kugel angreifende Kraft und ein Gegenpaar, das mit jener Kraft in der Fundamentalebene liegt. Die Kraft zerlegen wir in zwei Componenten X und Y, von denen jene in die Richtung des Radius vector t' fällt, diese auf demselben senkrecht steht. Es ist dann, wenn X_n, Y_n, X_s, Y_s die oben erwähnten Componenten der in den Polen angreifenden Kräfte sind:

$$X = X_n + X_s - (Y_n - Y_s)\frac{\lambda \sin\psi}{2t'},\quad Y = Y_n + Y_s + (X_n - X_s)\frac{\lambda \sin\psi}{2t'},$$

und für das Moment des gedachten Gegenpaares hat man:

$$G = Y_n\left(t' + \frac{\lambda\cos\psi}{2}\right) + Y_s\left(t' - \frac{\lambda\cos\psi}{2}\right).$$

Für obige Ausdrücke kann man aber schreiben:

$$X = M\left(\frac{dX}{dt}\cos\psi + \frac{dX}{d\varphi}\cdot\frac{\sin\psi}{t'} - Y\cdot\frac{\sin\psi}{t'}\right),$$

$$Y = M\left(\frac{dY}{dt}\cos\psi + \frac{dY}{d\varphi}\cdot\frac{\sin\psi}{t'} + X\cdot\frac{\sin\psi}{t'}\right),$$

$$G = M\left(\frac{dY}{dt}\,t'\cos\psi + \frac{dY}{d\varphi}\sin\psi + Y\cos\psi\right),$$

wo $t = t'$, $\varphi = \varphi'$ zu setzen ist.

Die Ausrechnung liefert, wenn man berücksichtigt, dass für $\varphi = \varphi'$ oder $\delta = 0$, die Coefficienten p_n gleich Eins werden, ihre ersten Derivationen nach $\cos\delta$ aber in die Reihe der dreieckigen Zahlen 1, 3, 6, 10, 15 etc. übergehen, welche mit den zweiten Binomial-Coefficienten der um Eins vermehrten Indices zusammenfallen:

$$X = -\frac{\varkappa M^2}{R^4}\left\{\cos\psi^2\sum_1^\infty (n+1)^2(n+2)\,C_n\left(\frac{R}{t'}\right)^{2n+5}\right.$$
$$\left. + \sin\psi^2\sum_1^\infty (n+1)_2(n+2)\,C_n\left(\frac{R}{t'}\right)^{2n+5}\right\},$$

$$Y = \frac{\varkappa M^2}{R^4}\sin\psi\cos\psi\sum_1^\infty (n+2)_2\,C_n\left(\frac{R}{t'}\right)^{2n+5},$$

$$G = 0.$$

Die Wirkung, welche die Nadel erleidet, lässt sich also durch eine einzige im Mittelpunkte der Kugel angreifende Kraft, die Resultante von X und Y, darstellen. Diese Kraft lässt sich aber auch ersetzen durch eine parallele und gleich grosse, aber im Mit-

telpunkte der Nadel angreifende Kraft und ein Gegenpaar, für dessen absolutes Moment man hat:

$$Y.t' = \frac{\varkappa M^2}{R^3} \sin\psi \cos\psi \sum_1^\infty (n+2)_2\, C_n \left(\frac{R}{t'}\right)^{2n+4}.$$

Es strebt aber das Gegenpaar stets die Axe der Nadel auf dem kürzesten Wege in den Radius vector t' einzustellen.

Was die Wirkung betrifft, welche die Kugel von Seiten der Nadel erleidet, so stellt sie sich nach Obigem durch eine einzige im Mittelpunkte angreifende Kraft mit den Componenten $-X$ und $-Y$ dar, indem, wenn die Nadel in feste Verbindung mit der Kugel gesetzt wird, Gleichgewicht herrschen muss. Wenn $\varkappa$ der Einheit gleich wird, so findet man für das an der Nadel wirkende Gegenpaar:

$$\frac{M^2}{R^3}\left\{\frac{3s^6}{(1-s^2)^2} + \frac{s^{10}}{(1-s^2)^3}\right\} \sin\psi \cos\psi,$$

wo s den Quotienten $R:t'$ bedeutet. Dieser Ausdruck lässt sich hier auch directer durch Anwendung der elektrischen Bilder herleiten. Für sehr kleine Werthe von $\varkappa$ ergiebt sich, indem man bloss die erste Potenz dieser Grösse berücksichtigt:

$$\frac{3\varkappa M^2}{R^3} s^3 \int_0^s \frac{s^2}{(1-s^2)^4} ds . \sin\psi \cos\psi,$$

was leicht *a posteriori* verificirt werden kann.

b. Induction in einer Hohlkugel.

Bei der Induction in einer Hohlkugel wird im Allgemeinen sowohl die Potentialfunction U, durch welche der magnetische Zustand bestimmt wird, und für die in der ganzen Masse der Hohlkugel der Ausdruck $\Delta^2 U$ verschwindet, als auch das inducirende Potential V auf magnetische Quanta zurückzuführen sein, die zum Theil ausserhalb der Kugel liegen, zum Theil in deren Höhlung eingeschlossen sind, oder, was dasselbe ist, auf magnetische Ladungen, die sowohl über die äussere Oberfläche, als auch über die der Höhlung ausgebreitet sind. Aus diesem Grunde setzen wir für die in der Masse der Hohlkugel gelegenen Punkte, indem wir den Radius der äusseren Grenzfläche durch R, den der inne-

ren durch R' und die Entfernung vom Mittelpunkte durch t bezeichnen:

$$V=\sum_0^\infty P_n\left(\frac{t}{R}\right)^n+\sum_0^\infty P'_n\left(\frac{R'}{t}\right)^{n+1},$$

$$U=\sum_0^\infty Q_n\left(\frac{t}{R}\right)^n+\sum_0^\infty Q'_n\left(\frac{R'}{t}\right)^{n+1},$$

wo die Coefficienten P und Q Functionen der gewöhnlichen Polar-Coordinaten φ und θ sind. Wir substituiren obige Entwicklungen in die Bedingungsgleichung für das magnetische Gleichgewicht und finden mittelst einer Rechnung, die der bei der Vollkugel angewandten ganz analog ist, für jeden von 0 verschiedenen Index:

$$[(n+1)\varkappa-(2n+1)]\,Q_n+(n+1)\,\varkappa q^{n+1}\,Q'_n+\frac{1}{3}(2n+1)(3-2\varkappa)\,P_n=0,$$

$$n\varkappa q^n Q_n+[n\varkappa-(2n+1)]\,Q'_n+\frac{1}{3}(2n+1)(3-2\varkappa)\,P'_n=0,$$

wo der Buchstabe q für den Quotienten $R':R$ gesetzt ist. Was aber den Index 0 betrifft, so gilt für denselben nur die zweite Gleichung, während in der ersten rechts statt der Null eine willkürliche Constante zu setzen ist. Sehen wir indess von der in U auftretenden willkürlichen Constante ab, wodurch offenbar in der Bestimmung des magnetischen Zustandes und des Potentiales des inducirten Magnetismus nichts geändert wird, so können wir die beiden letzten Gleichungen auch für den Index 0 gelten lassen.

Schliesslich hat man die beiden Gleichungen nach Q_n und Q'_n aufzulösen und die Lösungen in den Ausdruck für U einzusetzen.

Das Potential der influencirten Hohlkugel in dem ausserhalb derselben gelegenen Raume ist:

$$T=-\frac{3\varkappa}{3-2\varkappa}\left\{\sum_0^\infty\frac{n\,Q_n-(n+1)\,q^{n+1}\,Q'_n}{2n+1}\left(\frac{R}{t}\right)^{n+1}-\sum_0^\infty\frac{nq^n Q_n-(n+1)\,Q'_n}{2n+1}\left(\frac{R'}{t}\right)^{n+1}\right\},$$

und für die Punkte der Höhlung findet man hiernach:

$$T=-\frac{3\varkappa}{3-2\varkappa}\left\{\sum_0^\infty\frac{n\,Q_n-(n+1)\,q^{n+1}\,Q'_n}{2n+1}\left(\frac{t}{R}\right)^{n}-\sum_0^\infty\frac{nq^n Q_n-(n+1)\,Q'_n}{2n+1}\left(\frac{t}{R'}\right)^{n}\right\}.$$

Die gefundenen allgemeinen Formeln sollen jetzt auf einige einfache besondere Fälle angewandt werden.

α) Verhalten einer Hohlkugel im homogenen magnetischen Felde.

Das Potential in einem homogenen magnetischen Felde hat bei gehöriger Wahl der Fundamentallinie oder Axe des Polarcoordinatensystemes die Form:

$$V = Kt \cos \varphi.$$

In der oben angewandten allgemeinen Form des inducirenden Potentiales verschwindet also die zweite Summe und in der ersten Summe ist:

$$P_0 = 0,\ P_1 = KR \cos \varphi,\ P_2 = 0,\ P_3 = 0 \text{ etc.}$$

Hieraus schliessen wir im Hinblick auf die zur Bestimmung von Q_n und Q_n' dienenden Gleichungen, dass diese Coefficienten für jeden von Eins verschiedenen Index verschwinden; für $n = 1$ aber findet man:

$$Q_1 = \frac{(3 - \varkappa)(3 - 2\varkappa)}{9(1 - \varkappa) + 2\varkappa^2(1 - q^3)} P_1,$$

$$Q'_1 = \frac{\varkappa(3 - 2\varkappa)q}{9(1 - \varkappa) + 2\varkappa^2(1 - q^3)} P_1.$$

Mittelst dieser Werthe wird das Potential des inducirten Magnetismus im äusseren Raume:

$$T = -\frac{\varkappa(3 - \varkappa)(1 - q^3)}{9(1 - \varkappa) + 2\varkappa^2(1 - q^3)} \cdot \frac{KR^3 \cos \varphi}{t^2},$$

und das in der Höhlung herrschende Potential ist:

$$T = -\frac{2\varkappa^2(1 - q^3)}{9(1 - \varkappa) + 2\varkappa^2(1 - q^3)} Kt \cos \varphi.$$

Die letzte Function setzt sich mit dem inducirenden Potential zusammen zu dem Gesammtpotentiale:

$$\frac{9(1 - \varkappa)}{9(1 - \varkappa) + 2\varkappa^2(1 - q^3)} V,$$

woraus wir ersehen, dass in dem von der Kugelschale umschlossenen Raume die Wirkung des inducirten Magnetismus lediglich darin besteht, dass er das inducirende Potential in dem Verhältnisse von Eins zu

$$\frac{9(1 - \varkappa)}{9(1 - \varkappa) + 2\varkappa^2(1 - q^3)}$$

schwächt.

Das für den äusseren Raum geltende Potential der magnetisirten Kugel unterscheidet sich nur durch seinen constanten Coefficienten von dem einer vollen Kugel, die dieselbe Oberfläche wie die Hohlkugel hat. Für das Verhältniss beider Potentiale, also auch für das der Wirkungen, welche die Hohl- und Vollkugel nach aussen hin zeigen, finden wir:

$$\frac{1+\frac{9(1-\varkappa)}{2\varkappa^2}}{1+\frac{9(1-\varkappa)}{2\varkappa^2(1-q^3)}}.$$

Ueber die magnetische Wirkung eiserner Hohlkugeln, die durch den Erdmagnetismus influencirt sind, hat Barlow a. a. O. Beobachtungen mitgetheilt. Er fand unter anderem, dass die Wirkung einer Hohlkugel von 5 Zoll Radius und $^1/_{30}$ Zoll Dicke ungefähr zwei Drittel der Wirkung einer gleichgrossen Vollkugel ausmacht. Hiernach berechnet sich mittelst der letzten Formel die Inductions-Constante beim Eisen zu 0,9977. Unter Zugrundelegung des letzten Werthes findet man für das Verhältniss der Wirkungen einer Hohlkugel und einer gleich grossen Vollkugel, wenn jene $^3/_4$ von dieser an Masse hat, das heisst für $1-q^3=\,^3/_4$, den Werth 0,9966. Hiermit in Uebereinstimmung steht, dass Barlow bei einer Hohl- und einer Vollkugel aus Eisen von 5 Zoll Radius keinen Unterschied in der Wirkung entdecken konnte, als ihre Gewichte in dem angegebenen Verhältnisse zu einander standen.

β) Magnetisirung einer Hohlkugel durch eine in ihrem Mittelpunkte befindliche verschwindend kleine Magnetnadel.

In dem Mittelpunkte einer Hohlkugel liege eine verschwindend kleine Magnetnadel mit dem magnetischen Momente M. Nehmen wir nun die Axe der Nadel zur Fundamentallinie des Polar-Coordinaten-Systems und behalten die früheren Bezeichnungen bei, so schreibt sich das Potential der Nadel:

$$V=\frac{M\cos\varphi}{t^2}.$$

Um den durch die Nadel hervorgerufenen magnetischen Zustand der Kugelschale zu bestimmen, setzen wir also in den allgemeinen Formeln die Coefficienten P_n gleich Null, ferner:

$$P_0' = 0, \quad P_1' = \frac{M \cos \varphi}{R'^2}, \quad P_2' = 0, \quad P_3' = 0 \text{ etc.}$$

Hiernach findet man, dass von den Coefficienten Q_n und Q_n' alle ausser Q_1 und Q_1' verschwinden. Für letztere aber ergiebt sich:

$$Q_1 = \frac{2\varkappa(3 - 2\varkappa)q^2}{9(1 - \varkappa) + 2\varkappa^2(1 - q^3)} P_1',$$

$$Q_1' = \frac{(3 - 2\varkappa)^2}{9(1 - \varkappa) + 2\varkappa^2(1 - q^3)} P_1'.$$

Mittelst dieser Werthe erhält man für den ausserhalb der Kugelschale gelegenen Raum das Potential:

$$T = - \frac{2\varkappa^2(1 - q^3)}{9(1 - \varkappa) + 2\varkappa^2(1 - q^3)} V,$$

und für die Punkte der Höhlung findet man:

$$T = - \frac{2\varkappa(3 - 2\varkappa)(1 - q^3)}{q^3\{9(1 - \varkappa) + 2\varkappa^3(1 - q^3)\}} \cdot \frac{Mt \cos \varphi}{R^3}.$$

Aus dem vorletzten Ausdrucke ersehen wir, dass die Wirkung der in der Hohlkugel eingeschlossenen Nadel nach aussen hin in demselben Verhältnisse geschwächt wird, wie die Wirkung eines homogenen Feldes für den von der Schale umschlossenen Raum.

3. Magnetische Induction in einer seitlich unbegrenzten plan-planen Platte.

In den vorhergegangenen Problemen wurde die magnetische Erregung auf rein analytischem Wege durch Auflösung der Bedingungsgleichungen für das magnetische Gleichgewicht gefunden. In dem Probleme, welches wir uns jetzt vorlegen wollen, möge dieselbe durch unmittelbare Ableitung der Hülfsfunctionen bestimmt werden, welche wir in den allgemeinen Betrachtungen über die Induction durch $V^{(\nu)}$ bezeichneten, ein Weg, welchen W. Thomson zuerst einschlug.

Eine plan-plane Platte von endlicher Dicke und unendlichen

Querdimensionen sei der Wirkung eines Poles P mit dem Potentiale V ausgesetzt. Wir haben alsdann, wenn wir die frühere Bezeichnungsweise beibehalten, für sämmtliche Punkte der Platte:

$$V' = V - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\frac{dV}{dn}}{r} ds.$$

Für das Integral, welches sich über die Elemente beider Grenzflächen erstreckt, können wir setzen:

$$\int \frac{\frac{dV}{dn_1}}{r} ds + \int \frac{\frac{dV}{dn_2}}{r} ds,$$

wo das erste Integral über die dem Pole zunächst gelegene Grenzfläche, das zweite Integral über die andere Grenzfläche sich erstreckt, und durch n_1 und n_2 die auswärts gekehrten Normalen jener Flächen bezeichnet sind. Wenn wir aber durch V^I das Potential eines Punktes P^I bezeichnen, welcher in Bezug auf die von P abgekehrte Grenzfläche das Spiegelbild des inducirenden Poles ist und dieselbe magnetische Quantität wie dieser enthält, so ist für jeden Punkt der Platte:

$$\int \frac{\frac{dV}{dn_1}}{r} ds = + 2\pi V, \qquad \int \frac{\frac{dV}{dn_2}}{r} ds = - 2\pi V^I.$$

Diese Beziehungen ergeben sich leicht unmittelbar, sowie aus den in der Elektrostatik aufgestellten Sätzen über die von einem Punkte ausgehende elektrische Induction auf einer abgeleiteten Kugelfläche, indem man den Radius derselben über alle Grenzen hinaus wachsen lässt, wodurch jene in eine Ebene übergeht.

Die Substitution der letzten Ausdrücke liefert:

$$V' = \tfrac{1}{2}(V + V^I).$$

Durch dasselbe Verfahren, wodurch V' aus V abgeleitet wurde, lassen sich der Reihe nach ferner V'', V''' u. s. w. finden. Bezeichnen wir durch V^{II} das Potential eines Poles P^{II}, der das Spiegelbild von P^I in Bezug auf die dem Pole P zugekehrte Grenzfläche ist und der dieselbe Quantität wie letzterer hat, so kommt:

$$V'' = \frac{1}{2^2}(V + 2V^I + V^{II}).$$

Ferner hat man, wenn V^{III} das Potential eines Punktes P^{III} be-

deutet, der das Spiegelbild von P^{II} in Bezug auf die von P abgekehrte Grenzfläche ist, und wiederum dasselbe magnetische Quantum wie P enthält:

$$V''' = \frac{1}{2^3}(V + 3\,V^I + 3\,V^{II} + V^{III}),$$

u. s. f.

Die Pole P, P^I, P^{II}, P^{III} u. s. f., deren Potentiale in den oben gewonnenen Ausdrücken auftreten, liegen in einer auf der Platte senkrechten geraden Linie und zwar befinden sich die Pole P, P^{II} u. s. f. mit geradem Index auf der einen, die Pole P^I, P^{III} u. s. f. mit ungeradem Index auf der andern Seite der Platte. Sowohl jene, wie auch diese sind gleichweit, nämlich um die doppelte Dicke der Platte, von einander entfernt.

Aus den für die Functionen $V^{(\nu)}$ gefundenen Ausdrücken lassen sich jetzt ohne Schwierigkeit mittelst der allgemeinen Formeln die Grössen U, ϱ, T finden. Man findet insbesondere:

$$U = 2 \cdot \frac{3 - 2\varkappa}{3\varkappa}(m\,V + m^2\,V^I + m^3\,V^{II} + \cdots),$$

wo zu setzen ist:

$$m = \frac{\varkappa}{2 - \varkappa}.$$

Was ferner das Potential des inducirten Magnetismus betrifft, so bemerke man, dass für den Raum, in welchem die Pole mit geradem Index liegen, bekannten Sätzen der Elektrostatik zufolge, ist:

$$\int \frac{\frac{dV}{dn}}{r}\,ds = 2\pi(V_I - V_{III}), \qquad \int \frac{\frac{dV^I}{dn}}{r}\,ds = 0,$$

$$\int \frac{\frac{dV^{II}}{dn}}{r}\,ds = 2\pi(V_{III} - V_V), \qquad \int \frac{\frac{dV^{III}}{dn}}{r}\,ds = 0,$$

etc.

wo durch V_I, $V_{III} \cdots$ die Potentiale von Polen P_I, $P_{III} \cdots$ bezeichnet sind, welche die Spiegelbilder von P, $P^{II} \ldots$ in Bezug auf die nächst gelegene Grenzfläche sind und dasselbe magnetische Quantum wie P enthalten. Es fällt übrigens der Pol P_{III} mit dem Pole P^I, P_V mit P^{III} u. s. f. zusammen, so dass auch V_{III} und V^I, V_V und V^{III} u. s. f. einander gleich sind.

Für den gedachten Raum erhält man nun mit Rücksicht auf die erwähnten Beziehungen:

$$T = -\{m(V_I - V_{III}) + m^3(V_{III} - V_V) + \cdots\}.$$

Es ist ferner für den Raum, in welchem die Pole mit ungeradem Index liegen:

$$\int \frac{\frac{dV}{dn}}{r} ds = 0, \quad \int \frac{\frac{dV^I}{dn}}{r} ds = 2\pi(V - V^{II}),$$

$$\int \frac{\frac{dV^{II}}{dn}}{r} ds = 0, \quad \int \frac{\frac{dV^{III}}{dn}}{r} ds = 2\pi(V^{II} - V^{IV}),$$

etc.

Hiernach kommt:

$$T = -\{m^2(V - V^{II}) + m^4(V^{II} - V^{IV}) + \cdots\}.$$

Man findet endlich noch für das in dem letztgedachten Raume herrschende Gesammtpotential:

$$(1 - m^2)(V + m^2 V^{II} + m^4 V^{IV} + \cdots).$$

Wenn die vom Pole abgekehrte Grenzfläche der Platte ins Unendliche rückt, so geht letztere in eine nach drei Dimensionen unendliche, einseitig durch eine Ebene begrenzte Masse über. Alsdann kommt:

$$U = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 - 2\varkappa}{2 - \varkappa} V,$$

so dass die magnetischen Axen aller Elemente in die Kraftlinien des inducirenden Poles fallen. Ferner wird:

$$T = -\frac{\varkappa}{2 - \varkappa} V_I,$$

und hieraus ergiebt sich für die Anziehung, welche der Pol seitens des inducirten Magnetismus erleidet, wenn Q das im Pole concentrirte magnetische Quantum, d seine Entfernung von der Grenzfläche bedeutet:

$$\frac{\varkappa}{2 - \varkappa} \cdot \frac{Q^2}{4d^2}.$$

Die im Obigen gewonnenen Resultate lassen sich leicht auf den allgemeinen Fall ausdehnen, wo die Induction der Platte durch einen beliebigen permanenten Magneten bewirkt wird, indem ein solcher als ein Complex von unendlich vielen Polen mit un-

endlich kleinen magnetischen Quantitäten angesehen werden darf und die von den einzelnen Polen in der Platte hervorgerufenen magnetischen Ladungen sich über einander lagern. An die Stelle der einzelnen Pole, die im abgehandelten Falle auftraten, kommen hier ganze Magnete. Dem Pole P entspricht der inducirende Magnet, der Reihe P^{II}, P^{IV} etc. entspricht eine Reihe fictiver, auf derselben Seite der Platte liegender Magnete, die dem erst erwähnten gleich sind und die eine solche Lage gegen jenen und die Platte einnehmen, dass alle homologen Punkte in je einer geraden, auf der Platte senkrechten Linie liegen, und je zwei auf einander folgende homologe Punkte um die doppelte Dicke der Platte von einander entfernt sind. Dasselbe gegenseitige Verhältniss findet für die Reihe fictiver Magnete statt, die an Stelle der Pole P_I, P_{III}, P_V etc. auftreten, aber der erste von diesen Magneten ist in Bezug auf die dem inducirenden Magneten zunächst gelegene Grenzfläche mit letzterem symmetrisch gebaut und gelegen, so dass also jene Magnete zwar unter einander, aber im Allgemeinen nicht mit dem Inducenten congruent sind.

4. Verhalten eines Ellipsoides im homogenen magnetischen Felde.

Um die magnetische Erregung eines Ellipsoides in einem homogenen magnetischen Felde zu bestimmen, betrachten wir zuerst den Fall, wo die Kraftlinien mit einer Axe parallel sind. In Bezug auf die Axen des Ellipsoides als Coordinaten-Axen sei also das inducirende Potential etwa:

$$V = x.$$

Unter Beibehaltung der früher gebrauchten Bezeichnungsweise haben wir alsdann, wenn die Coordinaten der Elemente ds der Oberfläche durch Accente bezeichnet werden:

$$V' = -\frac{1}{4\pi}\int V \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds = -\frac{1}{4\pi}\int x' \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds.$$

Es ist aber:

$$x' = x + r \cos \varphi,$$

wenn x zu dem Punkte gehört, auf den sich die Function V' bezieht, und wenn φ den Winkel bedeutet, welchen die Verbindungslinie r des gedachten Punktes und des Flächenelementes ds mit der x-Axe bildet. Ferner bemerken wir, dass, wenn das Element ds auf eine Kugel projicirt wird, die um den erwähnten Punkt — das Centrum der r — mit dem Radius 1 beschrieben ist, und $d\sigma$ die Projection darstellt:

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds = -\frac{\frac{dr}{dn}}{r^2} ds = -d\sigma$$

ist. Wir haben hiernach:

$$V' = \frac{1}{4\pi}\int (x + r\cos\varphi)\, d\sigma = x + \frac{1}{4\pi}\int r \cos\varphi\, d\sigma.$$

Das hier auftretende Integral stellt die nach der x-Axe gerichtete Componente der Anziehung dar, welche die Masse Eins in dem Punkte, auf den sich V' bezieht, erlitte, wenn das Ellipsoid mit Masse von der Dichtigkeit Eins erfüllt und die Attractions-Constante gleich Eins wäre. Für dieselbe Componente kann man bekanntlich setzen:

$$-x \cdot \frac{A}{a},$$

wenn a die Hälfte der in die x-Axe fallenden Axe des Ellipsoides und A die Anziehung bedeutet, welche die Masseneinheit unter den oben erwähnten Verhältnissen in einem Scheitel jener Axe erleidet. Es ist also:

$$V' = \left(1 - \frac{A}{4\pi a}\right) V,$$

und hieraus schliessen wir, dass allgemein zu setzen ist:

$$V^{(\nu)} = \left(1 - \frac{A}{4\pi a}\right)^{\nu} V.$$

Mit Hülfe der allgemeinen Formeln kann jetzt leicht das magnetische Verhalten des Ellipsoides bestimmt werden. Ins Be-

sondere findet man für die Dichtigkeit der idealen magnetischen Oberflächenladung:

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty \varkappa^{\nu+1}\frac{d\,V^{(\nu)}}{dn} = -\frac{\cos\mathfrak{a}}{\frac{A}{a}+\frac{4\pi(1-\varkappa)}{\varkappa}},$$

wo $\mathfrak{a}$ den Winkel bedeutet, den die Normale des Ellipsoides mit der x-Axe bildet.

Vergleichen wir den letzt gefundenen Ausdruck mit dem für die elektrische Dichtigkeit der Ladung, welche von dem Potentiale V, wenn es ein elektrisches wäre, auf dem leitend gedachten Ellipsoide hervorgerufen würde, so bemerken wir, dass er sich von letzterem nur durch das Auftreten des Gliedes $\frac{4\pi(1-\varkappa)}{\varkappa}$ unterscheidet. Deshalb lassen sich die für die Elektrisirung eines Ellipsoides durch eine constante Kraft in der Elektrostatik gewonnenen Resultate leicht auf die magnetische Induction übertragen. Wir gelangen auf diese Weise zu folgenden Beziehungen.

Ein Ellipsoid E mit den Halbaxen a, b, c sei der Wirkung einer vertheilenden magnetischen Kraft K ausgesetzt, welche mit den Axen des Ellipsoides bezüglich die Winkel λ, μ, ν bilde. Die magnetischen Verhältnisse des Ellipsoides lassen sich dann in einfacher Weise mittelst eines Hülfsellipsoides $\mathfrak{E}$ darstellen, dessen Axen $2\mathfrak{A}$, $2\mathfrak{B}$, $2\mathfrak{C}$ mit denen des ersten der Richtung nach zusammenfallen und sich wie folgt bestimmen:

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{A}{a}+\frac{4\pi(1-\varkappa)}{\varkappa},\quad \mathfrak{B}^2 = \frac{B}{b}+\frac{4\pi(1-\varkappa)}{\varkappa},$$

$$\mathfrak{C}^2 = \frac{C}{c}+\frac{4\pi(1-\varkappa)}{\varkappa};$$

hier bedeuten aber A, B, C die Anziehungen, welche die Masseneinheit in den Scheiteln des ersten Ellipsoides erleiden würde, wenn die Dichtigkeit desselben, wie auch die Attractions-Constante, gleich Eins wäre. Nehmen wir an, es sei:

$$a > b > c,$$

so wird, wenn $\varkappa$ zwischen 0 und 1 liegt, wie solches beim Eisen und den in magnetischer Hinsicht ähnlichen Körpern der Fall ist:

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{C};$$

die mittleren Axen der Ellipsoide E und $\mathfrak{E}$ fallen also zusammen, die grösste und kleinste Axe des Ellipsoides $\mathfrak{E}$ aber fällt bezüglich in die kleinste und grösste Axe des Ellipsoides E.

In dem Hülfsellipsoide werde der Radius q mit der Kraft K parallel gezogen, in dessen Endpunkt eine Tangential-Ebene gelegt und auf diese aus dem Mittelpunkte ein Perpendikel p herabgelassen. In der Richtung dieses Perpendikels nach der Seite hin, nach welcher ein Nordpol von der Kraft K getrieben wird, verschiebe man das Ellipsoid E ohne es zu drehen in eine neue Lage E', so dass seine einzelnen Punkte die Strecke

$$\frac{\varepsilon K}{pq}$$

beschreiben, unter ε eine verschwindend kleine Grösse gedacht. Das Ellipsoid E' werde mit nördlichem Fluidum von der Dichte $\frac{1}{\varepsilon}$ gefüllt und mit ebenso dichtem, aber südlichem Fluidum das Ellipsoid E. Die beiden so gefüllten Ellipsoide E und E' sind alsdann der idealen Oberflächenladung des magnetisirten Ellipsoides äquivalent, für welche man hat:

$$\varrho = -K\left\{\frac{\cos\lambda\cos\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}^2} + \frac{\cos\mu\cos\mathfrak{b}}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\cos\nu\cos\mathfrak{c}}{\mathfrak{C}^2}\right\}.$$

Für das magnetische Moment des Ellipsoides erhält man, wenn das Volumen durch E bezeichnet wird:

$$M = \frac{EK}{pq}.$$

Die Wirkung, welche das Ellipsoid von Seiten der Kraft K erleidet, stellt sich durch ein Gegenpaar dar, dessen Ebene durch das Perpendikel p und den Radius q bestimmt ist, und dessen Moment gleich ist:

$$EK^2 \cdot \frac{\sin\delta}{pq},$$

wo δ den Winkel zwischen den Linien p und q bedeutet. Seine Componenten nach den drei Axen des Ellipsoides haben folgende Werthe:

$$\Xi = EK^2\left(\frac{1}{\mathfrak{B}^2} - \frac{1}{\mathfrak{C}^2}\right)\cos\mu\cos\nu,\quad H = EK^2\left(\frac{1}{\mathfrak{C}^2} - \frac{1}{\mathfrak{A}^2}\right)\cos\nu\cos\lambda,$$

$$Z = EK^2\left(\frac{1}{\mathfrak{A}^2} - \frac{1}{\mathfrak{B}^2}\right)\cos\lambda\cos\mu.$$

Der veränderliche Theil des halben Potentiales des gesammten in Betracht kommenden Magnetismus in Bezug auf sich selbst drückt sich wie folgt aus:

$$W = -\frac{EK^2}{2q^2}.$$

Wir entnehmen hieraus ohne Weiteres, dass, wenn das Ellipsoid ganz frei oder um seinen festen Mittelpunkt herum beweglich ist, wenn ferner an ihm ausser den magnetischen keine oder gleiche und parallele Kräfte — etwa Schwerkräfte — wirken, und wenn endlich seine Substanz sich in magnetischer Hinsicht ähnlich wie Eisen verhält, nur dann Gleichgewicht stattfindet, wenn eine Axe des Ellipsoides in die Richtung der vertheilenden Kraft fällt. Ferner ergiebt sich, dass das Gleichgewicht nur dann stabil ist, wenn die grösste Axe des Ellipsoides jene Richtung einnimmt.

Ist das Ellipsoid um einen festen Durchmesser drehbar und steht überdies die vertheilende Kraft auf jenem Durchmesser senkrecht, so ist das Ellipsoid im Gleichgewicht, so oft die eine oder die andere Axe des zur Drehaxe senkrechten Diametralschnittes des Hülfsellipsoides mit der vertheilenden Kraft parallel läuft. Je nachdem hierbei die kleine oder die grosse Axe des genannten Schnittes in die Richtung der Kraft fällt, wird das Gleichgewicht bezüglich stabil oder labil. In dem besondern Falle endlich, wo die Drehaxe des Ellipsoides auf einem Kreisschnitte der Hülfsfläche senkrecht steht, wird das Gleichgewicht indifferent.

Mittelst des Ausdruckes für das halbe Potential des Magnetismus in Bezug auf sich selbst wollen wir auch noch die rotatorische oder oscillatorische Bewegung bestimmen, welche das influencirte Ellipsoid annimmt, wenn es um einen festen Durchmesser drehbar ist, die vertheilende Kraft auf diesem Durchmesser senkrecht steht und wenn dem Ellipsoide eine solche anfängliche Winkelgeschwindigkeit mitgetheilt wird, dass man annehmen darf, seine Magnetisirung sei zu jeder Zeit diejenige, welche sich nach dem Obigen für die augenblickliche Lage ergiebt.

Die kleine Halbaxe in dem zur Rotationsaxe senkrechten Diametralschnitte des Hülfsellipsoides sei q_1, die grosse Halb-

axe sei q_2. Der Winkel zwischen q_1 und der Richtung der vertheilenden Kraft werde durch φ bezeichnet; er verschwindet, wenn das Ellipsoid die Lage des stabilen Gleichgewichtes einnimmt. Wir erhalten dann erstlich für die Arbeit, welche von den beschleunigenden Kräften während des Zeitdifferentiales dt geleistet wird:

$$-dW = \frac{EK^2}{2} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{q^2}\right)}{d\varphi} d\varphi.$$

Andererseits drückt sich dieselbe Arbeit, wenn die Beschleunigung aus der Bewegung abgeleitet wird, wie folgt aus, unter J das Trägheitsmoment des Ellipsoides in Bezug auf die Drehaxe verstanden:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} d\varphi.$$

Da ferner:

$$\frac{1}{q^2} = \frac{\cos \varphi^2}{q_1^2} + \frac{\sin \varphi^2}{q_2^2}$$

ist, so liefert die Gleichsetzung der beiden für die Arbeit gefundenen Ausdrücke und die Integration der resultirenden Gleichung, wenn noch für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ der Buchstabe θ gesetzt wird, und wenn θ_0 den Werth dieser Geschwindigkeit für die Zeit 0 bedeutet, wo der Radius q_1 in die Richtung von K falle:

$$\theta_0^2 - \theta^2 = \frac{EK^2\left(\frac{1}{q_1^2} - \frac{1}{q_2^2}\right)}{J} \sin \varphi^2.$$

Setzen wir:

$$\frac{EK^2\left(\frac{1}{q_1^2} - \frac{1}{q_2^2}\right)}{J\theta_0^2} = c^2,$$

so erhalten wir durch nochmalige Integration:

$$t = \frac{F(c, \varphi)}{\theta_0},$$

wo $F(c, \varphi)$ das elliptische Integral erster Art mit dem Modulus c und der Amplitude φ bedeutet.

Wenn die Bewegung des Ellipsoides eine oscillatorische ist und die Ausschläge φ so klein sind, dass sie ihren Sinus gleichgesetzt werden dürfen, so erhält man für die Dauer einer ganzen Oscillation:

$$\varDelta = 2\pi \sqrt{\frac{J}{EK^2\left(\frac{1}{q_1^2} - \frac{1}{q_2^2}\right)}}.$$

Ueber das Verhalten eines Ellipsoides aus Eisen im homogenen magnetischen Felde hat Plücker Versuche mitgetheilt. (On the magnetic induction of crystals. Philos. Transactions 1858). Unter Anderem experimentirte derselbe mit einem Ellipsoide, dessen Dimensionen so gewählt waren, dass bei Zugrundelegung des Centimeters als Einheit die Quadrate der Halbaxen folgende Werthe hatten:

$$a^2 = 4,\ b^2 = 1{,}6,\ c^2 = 1.$$

Als Inducent diente ein hufeisenförmiger Elektromagnet; seine senkrechten Schenkel hatten 10,1 Centimeter Durchmesser und ihre Axen waren 25,9 Centimeter von einander entfernt. Bei den zu erwähnenden Versuchen wurde der Mittelpunkt des Ellipsoides in die durch die Axen der Schenkel bestimmte Verticalebene gebracht, so dass er ungefähr 100 Centimeter von der Mittellinie des Magneten entfernt und 10 Centimeter tiefer als die ebenen Endflächen der beiden Schenkel zu liegen kam, weil hier die Kraftlinien des Magneten innerhalb des vom Ellipsoide eingenommenen Raumes als untereinander parallel und zugleich als horizontal angesehen werden durften, wie solches aus dem Stande einer Magnetnadel ersehen wurde. Die von dem Elektromagneten ausgehende Wirkung war so stark, dass der Einfluss des Erdmagnetismus nicht in Betracht kam; auch von der Torsionskraft des Fadens, an welchem das Ellipsoid aufgehängt wurde, sowie von dem Trägheitsmomente der zur Befestigung dienenden Schlingen aus dünnem Kupferdrahte konnte abgesehen werden.

Als nun das Ellipsoid so aufgehängt wurde, dass der Reihe nach die grösste, mittlere und kleinste Axe senkrecht zu stehen kam und zur Drehaxe wurde, stellte sich jedesmal die grössere von den beiden horizontalen Axen in die Richtung der vertheilenden Kraft. Für die Dauer $\varDelta_a$, $\varDelta_b$, $\varDelta_c$ der Oscillationen,

welche das Ellipsoid um die Lage des stabilen Gleichgewichtes herum ausführte, wenn bezüglich die grösste, mittlere und kleinste Axe Drehaxe war, fand Plücker aus mehreren Versuchen, während welcher die Grösse der inducirenden Kraft sich nur wenig änderte, folgende Werthe:

$$\varDelta_a = 13{,}350,\quad \varDelta_b = 9{,}407,\quad \varDelta_c = 11{,}411.$$

Ferner fand Plücker, dass das Gleichgewicht indifferent wurde, wenn die Drehaxe mit einem der beiden Durchmesser zusammenfiel, welche, in der Ebene der grössten und kleinsten Axe gelegen, mit jener einen Winkel von 30° bilden.

Um die Uebereinstimmung der mitgetheilten Versuche mit der Theorie zu beurtheilen, bemerken wir, dass nach der allgemeinen Formel für die Oscillationsdauer folgende Relationen bestehen:

$$\frac{1}{\varDelta_a^2} = \frac{G}{b^2+c^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{B}^2} - \frac{1}{\mathfrak{C}^2}\right),\quad \frac{1}{\varDelta_b^2} = \frac{G}{c^2+a^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{A}^2} - \frac{1}{\mathfrak{C}^2}\right),$$

$$\frac{1}{\varDelta_c^2} = \frac{G}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{A}^2} - \frac{1}{\mathfrak{B}^2}\right),$$

wo, unter s das specifische Gewicht des Ellipsoides verstanden, zu setzen ist:

$$G = \frac{5\,K^2}{4\,\pi^2 s}.$$

Man hat ferner für den Winkel ω, welchen die Normale eines Kreisschnittes der Hülfsfläche mit der grössten Axe des inducirten Ellipsoides bildet:

$$tang\,\omega^2 = \frac{\frac{1}{\mathfrak{B}^2} - \frac{1}{\mathfrak{C}^2}}{\frac{1}{\mathfrak{A}^2} - \frac{1}{\mathfrak{B}^2}}.$$

Aus Obigem ergeben sich folgende von der Inductionsconstante $\varkappa$ unabhängige Resultate:

$$\frac{b^2+c^2}{\varDelta_a^2} + \frac{a^2+b^2}{\varDelta_c^2} = \frac{c^2+a^2}{\varDelta_b^2},$$

$$tang\,\omega^2 = \frac{\varDelta_c^2\,(b^2+c^2)}{\varDelta_a^2\,(a^2+b^2)}.$$

Bei den mitgetheilten Versuchen war aber:

$$\frac{b^2+c^2}{\varDelta_a^2} = 0{,}01459,\quad \frac{c^2+a^2}{\varDelta_b^2} = 0{,}05650,\quad \frac{a^2+b^2}{\varDelta_c^2} = 0{,}04301.$$

In der That ist, wie die erste Relation es verlangt, die Summe des ersten und letzten obiger Werthe von dem mittleren Werthe nur um einen geringen Theil des letzteren verschieden. Ferner findet man mittelst der zweiten Formel in naher Uebereinstimmung mit der unmittelbaren Beobachtung für den Winkel ω den Werth $30^0 13'$.

Wie früher bemerkt wurde, kommt die Inductionsconstante $\varkappa$ beim Eisen der Einheit sehr nahe, und desshalb wird man näherungsweise für die Ausdrücke $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}^2$ die Quotienten $\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{C}{c}$ setzen können. Letztere lassen sich mittelst der elliptischen Functionen berechnen. Man setze nämlich:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} = m^2, \quad \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} = n^2$$

und bestimme den zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Bogen φ, für welchen:

$$\cos\varphi = \frac{c}{a}.$$

Ferner setze man:

$$X = \frac{1}{m^2}\{F(m, \varphi) - E(m, \varphi)\},$$

$$Y = \frac{1}{m^2 n^2}\left\{E(m, \varphi) - \frac{m^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\varDelta(m, \varphi)}\right\} - \frac{1}{m^2}F(m, \varphi),$$

$$Z = \frac{1}{n^2}\{\varDelta(m, \varphi)\, \mathrm{tang}\,\varphi - E(m, \varphi)\}.$$

Alsdann ist:

$$\frac{A}{a} = HX, \quad \frac{B}{b} = HY, \quad \frac{C}{c} = HZ,$$

wenn noch gesetzt wird:

$$\frac{4\pi abc}{(a^2 - c^2)^{3/2}} = H.$$

Für das in den besprochenen Versuchen angewandte Ellipsoid findet man:

$$X = 0{,}4017, \quad Y = 0{,}7174, \quad Z = 0{,}9349,$$

und hiernach kommt:

$$\frac{b^2 + c^2}{\varDelta_a^2} = 0{,}3243 \cdot \frac{G}{H}, \quad \frac{c^2 + a^2}{\varDelta_b^2} = 1{,}4198 \cdot \frac{G}{H},$$

$$\frac{a^2 + b^2}{\varDelta_c^2} = 1{,}0955 \cdot \frac{G}{H}.$$

Setzt man für die hier linker Hand stehenden Ausdrücke die Werthe, welche die Beobachtung lieferte, so findet man wirklich für die Grösse $H:G$ folgende einander nahe kommende Werthe:

$$22{,}2\,, \quad 25{,}1\,, \quad 25{,}5.$$

Was den im Obigen durch ω bezeichneten Winkel betrifft, so nimmt derselbe für $\varkappa = 1$ den Werth $28^0\,33'$ an, während er für $\varkappa = 0$ gleich $39^0\,41',5$ wird. In der That schliessen diese Grenzwerthe den beobachteten Winkel ein und liegt derselbe, wie zu erwarten war, nahe an der ersten Grenze.

Litteratur. Neumann. Entwicklung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Punkte in Reihen, welche nach den Laplace'schen $Y^{(n)}$ fortschreiten; und Anwendung dieser Reihen zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotations-Ellipsoides, welcher durch vertheilende Kräfte erregt ist. Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. Band XXXVII.

5. Vertheilung des Magnetismus in einem Kreiscylinder mit gerade angesetzten Endflächen durch eine mit der Axe parallele Kraft.

Der magnetische Zustand, welcher in einem cylindrischen Stabe mit gerade angesetzten Endflächen durch eine mit der Längsrichtung des Stabes parallele Kraft hervorgerufen wird, lässt sich stets auf zwei einfachere Zustände zurückführen, nämlich auf eine gleichförmige Magnetisirung, wobei in jedem kleinsten Theilchen die magnetische Axe mit der vertheilenden Kraft parallel ist, und denjenigen Zustand, welcher durch eine gleichförmige Belegung der Endflächen mit entgegengesetzt gleichen magnetischen Quanta erzeugt wird. In der That, es werde die z-Axe eines räumlichen Coordinatensystemes mit der Längsrichtung des Stabes parallel gelegt und für das inducirende Potential gesetzt:

$$V = Kz,$$

so dass K die Grösse der vertheilenden Kraft wird und letztere einen freien Nordpol in der Richtung, nach welcher die negativen z-Coordinaten gerechnet werden, bewegen würde. Wenn wir alsdann

$$U = \frac{3 - 2\varkappa}{3(1 - \varkappa)} K(z - f)$$

annehmen, so muss die Function f, wie die Substitution in die Bedingungsgleichung für das magnetische Gleichgewicht ergiebt, folgender Gleichung genügen:

$$\frac{3\varkappa}{4\pi}\left(\int \frac{ds_1}{r} - \int \frac{ds_2}{r}\right) - 3(1 - \varkappa) f - \frac{3\varkappa}{4\pi} \int \frac{\frac{df}{dn}}{r} ds = const.,$$

wo das erste und zweite Integral bezüglich über die eine und andere Endfläche, das dritte dagegen über die ganze Oberfläche des Stabes sich erstreckt. Hiernach kann f als diejenige Function U angesehen werden, welche dem inducirenden Potentiale:

$$\frac{3\varkappa}{4\pi(3 - 2\varkappa)}\left(\int \frac{ds_1}{r} - \int \frac{ds_2}{r}\right)$$

entspricht, woraus denn sofort die Richtigkeit der gemachten Bemerkung erhellt.

In dem einfacheren hier zu behandelnden Falle, wo der Querschnitt des Stabes ein Kreis ist, lässt sich die Function f, welche im Allgemeinen drei Veränderliche enthält, leicht auf eine Function mit einer Veränderlichen zurückführen. Bezeichnen wir, um dies auszuführen, durch t die Entfernung von der Axe des Stabes und legen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte desselben, so wird f eine Function von t und z allein, und es kommt:

$$\varDelta^2 f = \frac{1}{t} \cdot \frac{df}{dt} + \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{d^2 f}{dz^2}.$$

Da nun dieser Ausdruck in der ganzen Ausdehnung des Stabes verschwinden muss, so ergiebt sich für die Entwicklung der fraglichen Function nach Potenzen von t die folgende Form, in welcher A eine offenbar ungerade Function von z allein bedeutet:

$$f = A - \frac{d^2 A}{dz^2} \cdot \frac{t^2}{2^2} + \frac{d^4 A}{dz^4} \cdot \frac{t^4}{2^2 \cdot 4^2} - \cdots\cdot$$

Was die ideale Oberflächenladung des Stabes betrifft, so

dürfte es für manche Zwecke und namentlich bei verhältnissmässig dünnen Stäben gestattet sein, in ihrer Entwicklung die Glieder mit der zweiten und jeder höheren Potenz des Halbmessers zu vernachlässigen. Es sei ϱ die Dichtigkeit der Ladung für den gekrümmten Theil der Oberfläche, ϱ_1 und ϱ_2 die Dichtigkeit auf den Endflächen und zwar beziehe sich die Marke 1 auf die Endfläche mit positiver, die Marke 2 auf die Endfläche mit negativer z-Coordinate. Ferner werde durch a die halbe Länge, durch b der Halbmesser des Stabes und durch $\left(\frac{dA}{dz}\right)_a$ der Werth von $\frac{dA}{dz}$ für $z=a$ bezeichnet. Für den angegebenen Grad der Annäherung kommt alsdann:

$$\varrho = -\frac{\varkappa K}{4\pi(1-\varkappa)}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{d^2A}{dz^2},$$

$$\varrho_1 = -\varrho_2 = -\frac{\varkappa K}{4\pi(1-\varkappa)}\left[1-\left(\frac{dA}{dz}\right)_a\right].$$

Ferner hat man für das magnetische Moment M des Stabes:

$$M = 2\left\{2b\pi\int_0^a \varrho z\,dz + ab^2\pi\varrho_1\right\},$$

oder, wenn durch C das Volumen des Stabes und durch A_a der Werth von A für $z=a$ bezeichnet wird:

$$M = \frac{\varkappa CK}{4\pi(1-\varkappa)}\left(1-\frac{A_a}{a}\right).$$

Die oben für die Function f aufgestellte Gleichung liefert für solche Punkte auf der Axe des Stabes, deren Entfernung von der nächstgelegenen Endfläche grösser als der Halbmesser des Stabes ist und bei Vernachlässigung der Glieder mit der zweiten und jeder höheren Potenz von b, wie man leicht findet:

$$A - \frac{b^2\varkappa}{4(1-\varkappa)}\int_{-a}^{+a}\frac{\frac{d^2A}{dz'^2}}{\sqrt{b^2+(z'-z)^2}}\,dz' = const.$$

In erster Annäherung kann für das hier auftretende Integral

$$\frac{d^2A}{dz^2}\int_{-\zeta}^{+\zeta}\frac{dz'}{\sqrt{b^2+z'^2}}$$

gesetzt werden, unter ζ eine gewisse positive Constante verstanden, die im Vergleich mit b gross, im Vergleich mit a aber noch klein

ist. Es kommt dies darauf hinaus, bei der Auswerthung des Integrales $\int \frac{\frac{df}{dn}}{r} ds$ nur den Theil der convexen Oberfläche des Cylinders in Betracht zu ziehen, welcher zwischen zwei beiderseits vom Centrum der r um ζ entfernten Querschnitten liegt, und zugleich von der Aenderung der Grösse $\frac{d^2 A}{d z^2}$ auf diesem Theile der Oberfläche abzusehen. Hiernach ergiebt sich ferner für den bezeichneten Grad der Annäherung:

$$A - \frac{\varkappa}{2(1-\varkappa)} \cdot b^2 \log \frac{2\zeta}{b} \cdot \frac{d^2 A}{d z^2} = const.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert mit Rücksicht auf den Umstand, dass A eine ungerade Function ist:

$$A = \mu(e^{mz} - e^{-mz}),$$

wo μ eine Constante bedeutet und ferner zu setzen ist:

$$m = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{1-\varkappa}{\varkappa} \cdot \frac{2}{\log \frac{2\zeta}{b}}}.$$

Die für A gefundene Exponentialformel wird den Verlauf jener Function nur von der Mitte des Stabes bis zu einer gewissen Entfernung von den Endflächen annähernd darstellen und daher auch nur zur Bestimmung von ϱ auf dieser Strecke dienen können. Es scheint aber, dass zur Bestimmung der magnetischen Verhältnisse des Stabes für Punkte, die den Rändern nicht sehr nahe liegen, die aufgestellten Näherungsformeln und der für A gefundene Ausdruck angewandt werden dürfen, wofern nur in letzterem für μ und m schickliche, von dem Verhältnisse der Dimensionen und der Natur des Stabes abhängige Werthe eingesetzt werden. Es geht dies aus den Ergebnissen experimenteller Untersuchungen von Coulomb, Lenz und Jacobi und van Rees hervor. Ferner geht aus diesen Versuchen hervor, wie solches auch vom Standpunkte der Theorie zu erwarten ist, dass beim Stahl und Eisen die Constanten μ und m gleiches Vorzeichen aufweisen, sowie dass der Ausdruck $\left(\frac{dA}{dz}\right)_a$ stets kleiner als 1 ist.

Die Dichtigkeit der idealen Oberflächenladung des Stabes ist hier also auf der Hälfte des Stabes mit positiven z-Coordinaten

negativ, auf der andern Hälfte positiv und ihr absoluter Werth nimmt auf dem convexen Theile der Oberfläche von der Mitte, wo er verschwindet, nach den Rändern hin stetig zu.

Die hierher gehörigen Versuche Coulomb's (Biot, Traité de physique expérimentale et mathématique) beziehen sich auf cylindrische permanente Stahlmagnete, die bis zur Sättigung und regelmässig so magnetisirt waren, dass die Richtung der Polarität in allen Punkten als merklich parallel mit der Axe des Stabes angesehen werden durfte. Die Vertheilung des Magnetismus in solchen Stäben ist aber, wie wir später sehen werden, dieselbe wie bei einem gleichen Stabe aus weichem Eisen, auf welchen eine mit der Axe des Stabes parallele vertheilende Kraft wirkt. Coulomb bestimmte aus der Verkürzung der Oscillationsdauer die horizontale Componente der Kraft, mit welcher der vertical stehende Stab auf die Pole einer kleinen, horizontal aufgehängten Magnetnadel einwirkte, wenn letztere in gleicher Entfernung vor verschiedenen Stellen des Stabes so zu liegen kam, dass eine durch die Mitte der Nadel und die Axe des Stabes gelegte Ebene mit dem magnetischen Meridiane parallel war. Annähernd kann jene Componente, wofern die von der Nadel und dem Stabe ausgehende Induction ausser Acht kommt, als Maass für die oben durch ϱ bezeichnete Dichtigkeit angesehen werden; nur für die beiden Enden des Stabes ist das Doppelte der Componente als genähertes Maass dieser Grösse zu nehmen. Die Resultate, welche Coulomb unter Anderem bei einem Stabe von 27 par. Zoll Länge und 2 Linien Durchmesser erhielt, lassen sich nun, wie Biot bemerkte, durch die Annahme, dass ϱ mit dem Ausdrucke:

$$e^{mz} - e^{-mz}$$

proportional sei, in befriedigender Weise darstellen; aus dieser Annahme ergiebt sich aber den theoretischen Formeln gemäss die oben angegebene Form für die Function A.

Van Rees (Ueber die Vertheilung des Magnetismus im Magneten. Pogg. Annal. Bd. LXXIV) experimentirte gleichfalls mit permanenten, bis zur Sättigung magnetisirten Stahlstäben und zwar in folgender Weise. Nachdem der Magnetstab in einer auf dem magnetischen Meridiane senkrechten Lage befestigt worden war, wurde auf denselben eine kurze Inductionsspirale geschoben, deren Hülse möglichst dünn und eng war,

und deren Enden mit den Drahtenden eines festen Multiplicators in Verbindung standen. Von verschiedenen Stellen aus wurde nun die Spirale jedesmal plötzlich über das nächste Ende des Stabes weg in eine grössere Entfernung gerückt. Hierbei entstand in der Leitung der Spirale ein Inductionsstrom, welcher der Nadel des Multiplicators einen Anstoss ertheilte, so dass diese sich, die Gleichgewichtslage verlassend, bis zu einer gewissen Grenzlage hin bewegte, und hierauf um ihre Gleichgewichtslage herum oscillirte. Insofern die Dämpfung, welche der Multiplicator bewirkte, vernachlässigt werden konnte, war die angulare Anfangsgeschwindigkeit der Nadel mit dem Sinus des halben ersten Ausschlagwinkels proportional, und desshalb konnte letztere Grösse nach den Lehren der Elektrodynamik als Maass für die Intensität des durch die Induction erzeugten Integralstromes gelten. Unter jener Intensität versteht man aber das absolute Quantum der in Bewegung gesetzten positiven oder negativen Elektricität, durch den Widerstand des Leiters dividirt und mit einer gewissen Constante multiplicirt.

Van Rees gelangte zu dem Resultate, dass sich für denselben Stab und dieselbe Inductionsspirale die Abhängigkeit zwischen dem absoluten Werthe α des Ausschlagwinkels und dem Abstande z' des Centrums der Inductionsspirale und des Centrums des Stabes annähernd durch folgende Formel darstellen lasse, in welcher g, h und m drei constante Grössen bedeuten:

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = g - h \left(e^{mz'} + e^{-mz'}\right).$$

Wie von vorneherein zu erwarten, erfolgte der Ausschlag der Multiplicatornadel für zwei Punkte auf derselben Hälfte des Stabes nach derselben Seite, für zwei auf entgegengesetzten Seiten symmetrisch gelegene Punkte aber sind die Ausschläge entgegengesetzt und nahezu gleich.

Die folgende Tabelle enthält die Vergleichung obiger Formel mit den Beobachtungen, welche van Rees an einem Stabe von $80{,}1^{cm}$ Länge, $0{,}8^{cm}$ Dicke und mit einer Inductionsspirale von 1^{cm} Länge anstellte. Die erste Columne enthält die Entfernungen z' der Mitte der Spirale von der Mitte des Stabes; in der zweiten Columne stehen die entsprechenden Ausschlagwinkel, wie sie sich als Mittel aus Beobachtungen auf der einen

und anderen Hälfte des Stabes ergaben; endlich sind neben jene in der letzten Columne die Werthe von α gestellt, welche die oben angegebene Formel liefert, wenn man folgende Annahmen macht:

$$g = 0{,}22640,\ h = 0{,}02061,\ m = 0{,}04950.$$

z'	α	
	beobachtet	berechnet
0^{cm}	$21^0 52'$	$21^0 21'$
8	21 7	20 58
16	19 26	19 45
20	18 19	18 48
24	17 22	17 33
28	16 27	15 58
32	14 46	13 59
36	10 59	11 32
39,25	3 59	9 8

Um den Zusammenhang zwischen dem von van Rees beobachteten Inductionsstrom und der Vertheilung des Magnetismus im Stabe kennen zu lernen, wollen wir zunächst der Elektrodynamik die Bestimmung des Integralstromes entnehmen, welcher in einem linearen, kreisförmigen Leiter von einem Pole inducirt wird, wenn die relative Lage des Leiters und des Poles sich ändert. Jener Strom ist unter übrigens gleichen Umständen proportional mit dem Producte aus dem im Pole concentrirten Magnetismus und der Aenderung, welche die Projection der Stromfläche auf eine mit dem Radius Eins um den Pol als Centrum beschriebene Kugel in Folge der Bewegung erleidet. Nun lässt sich aber die Aenderung der projicirten Stromfläche stets darstellen mittelst des Potentiales einer ebenen Scheibe von verschwindender Dicke d, welche von dem Leiter begrenzt wird und auf der einen Seite mit nördlichem, auf der anderen Seite mit südlichem Fluidum von der absoluten Dichtigkeit $\frac{1}{d}$ bedeckt ist. Beschränken wir uns nämlich auf den hier nur in Betracht kommenden Fall, wo die Bahn des

Poles keine Schleife um den Leiter bildet und auch nicht denselben trifft, so fällt die Aenderung der Projection mit der Summe der stetigen Aenderungen des Potentiales für den Pol zusammen. Hinsichtlich des Potentiales einer in angegebener Weise belegten Kreisscheibe mögen hier noch folgende Bemerkungen Platz finden. Das Potential hat für zwei Punkte, welche in Bezug auf die Scheibe eine symmetrische Lage einnehmen, entgegengesetzt gleiche Werthe. Sein Werth verschwindet im Unendlichen, sowie auch in der Ebene der Scheibe ausserhalb des Grenzkreises. Auf der einen Seite der Scheibe selbst hat es den Werth $+ 2\pi$, auf der anderen Seite den Werth $- 2\pi$ und am Rande hat es bezüglich auf der einen Seite den Werth $+ \pi$, auf der anderen Seite den Werth $- \pi$.

Gehen wir jetzt zu dem Falle über, wo der Kreisleiter auf einen Magnetstab mit kreisförmigem Querschnitt aufgeschoben ist, und in ihm durch Abstreifen vom Magneten ein Strom inducirt wird. In der ursprünglichen Lage stehe die Ebene des Leiters auf der Axe des Stabes senkrecht, der Mittelpunkt des Leiters liege in der Axe und der Durchmesser des Leiters übertreffe den des Stabes nur um ein Unendlichkleines. Wenn wir alsdann durch V das Potential der Hülfskreisscheibe bezeichnen, so kommt für das Potential in Bezug auf den im Stabe enthaltenen Magnetismus oder in Bezug auf die ideale Oberflächenladung:

$$\int \varrho_1 V ds_1 + \int \varrho_2 V ds_2 + 2b\pi \int \varrho V dz,$$

und die Summe der stetigen Aenderungen, welche dieser Ausdruck erleidet, wenn der Kreisleiter bis ins Unendliche verschoben wird, ist dem Obigen zufolge unter denselben Umständen mit dem hierbei erzeugten Integralstrom proportional. Bei der Anwendung auf den hier vorliegenden Fall der Vertheilung dürfen wir in erster Annäherung annehmen, dass die magnetische Belegung einer Endfläche auf den Rand derselben zusammengedrängt sei. Ferner leuchtet ein, dass die Summe der stetigen Aenderungen des Potentiales V für einen Punkt auf dem convexen Theile der Oberfläche, welcher bei der Bewegung durch die Hülfskreisscheibe hindurchgeht, gleichzusetzen ist derselben Summe für einen Punkt, welcher in gleicher Entfernung wie jener auf einem am Rande der Scheibe auf diese errichteten Perpendikel liegt, um die Grösse

$+2\pi$ oder -2π vermehrt, jenachdem die erstgenannte Summe positiv oder negativ ist.

Nehmen wir der Bestimmtheit wegen an, die Coordinate z' eines Punktes der Kreisscheibe sei positiv, und letztere sei auf der dem Coordinaten-Anfangspunkte zugekehrten Seite mit südlichem Fluidum bedeckt, so ist das Potential der Scheibe für einen Punkt, der auf einem Perpendikel des Randes liegt und die Coordinate z hat:

$$+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{z-z'}{\sqrt{(z-z')^2+4b^2\cos\varphi^2}}\right)d\varphi \text{ oder}$$

$$-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{z-z'}{\sqrt{(z-z')^2+4b^2\cos\varphi^2}}\right)d\varphi,$$

jenachdem $z-z'$ bezüglich positiv oder negativ ist. Die stetigen Aenderungen, welche das Potential für einen Punkt der angegebenen Lage bei der Bewegung erleidet, fallen aber mit den entsprechenden Aenderungen des folgenden Ausdruckes zusammen:

$$-\pi\left(1+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{z-z'}{\sqrt{(z-z')^2+4b^2\cos\varphi^2}}\,d\varphi\right)=-\pi(1+Q(z)).$$

Hiernach erhalten wir endlich für die Intensität des Integralstromes, welcher entsteht, wenn der Leiter über das nächste Ende des Stabes bis ins Unendliche weggeschoben wird, abgesehen vom Vorzeichen, folgenden Ausdruck:

$$-\frac{\varepsilon\pi\omega}{w}\Bigg\{\varrho_1(1+Q(a))+\varrho_2(1+Q(-a))$$
$$+\frac{2}{b}\left[\int_{-a}^{+a}\varrho(1+Q(z))\,dz+2\int_{z'}^{+a}\varrho\,dz\right]+2\varrho_1\Bigg\},$$

wo noch durch ε eine gewisse absolut constante Grösse, durch w der Widerstand des Leiters und durch ω der Querschnitt des Stabes bezeichnet ist. Obiger Ausdruck verwandelt sich durch Substitution der früher für die Dichtigkeit der Oberflächenladung gefundenen Ausdrücke und durch Anwendung der theilweisen Integration in folgenden:

$$\frac{\varepsilon \varkappa \omega K}{4(1-\varkappa) w}\left\{2+Q(a)-Q(-a)-2\left(\frac{dA}{dz}\right)_{z'}-\int_{-a}^{+a}\frac{dA}{dz}\cdot\frac{dQ}{dz}\,dz\right\}.$$

Im Hinblick auf den Verlauf der Function Q, welche sich auf das elliptische Integral der ersten Art zurückführen lässt, kann man näherungsweise für den ersten Factor des Integranden den Werth $\left(\frac{dA}{dz}\right)_{z'}$ setzen. Ausserdem bemerke man, dass bei verhältnissmässig dünnen Stäben der Ausdruck: $Q(a) - Q(-a)$ von der Mitte bis in einige Entfernung von den Enden nahezu constant und zwar gleich 2 bleibt. Aus diesem Grunde lässt sich der Ausdruck für die Intensität des inducirten Integralstromes näherungsweise wie folgt schreiben:

$$\frac{\varepsilon \varkappa \omega K}{(1-\varkappa) w}\left[1-\left(\frac{dA}{dz}\right)_{z'}\right].$$

Diese Formel bleibt auch dann noch bestehen, wenn der kreisförmige Leiter auf einer kurzen Strecke unterbrochen ist und seine Enden durch einen anderen Leiter mit einander verbunden werden, der so geformt ist, dass in ihm kein merklicher Inductionsstrom hervorgerufen wird; nur ist alsdann für w der Widerstand der ganzen Leitung einzusetzen. Tritt ferner an die Stelle des kreisförmigen Leiters eine Spirale von geringer Länge und mit gleichen, nahe aneinander liegenden Windungen, die unmittelbar auf dem Stabe aufliegen, so wird, wie aus dem Vorhergehenden leicht zu entnehmen ist, die Intensität des Integralstromes unter übrigens gleichen Umständen mit dem Ausdrucke:

$$1-\frac{A_{\left(z'+\frac{l}{2}\right)}-A_{\left(z'-\frac{l}{2}\right)}}{l}$$

proportional gesetzt werden können, wo z' sich auf die Mitte der Spirale bezieht und l die Länge derselben bedeutet. Offenbar wird auch die Annahme jener Proportionalität dann noch zulässig sein, wenn man es mit einer Inductionsspirale zu thun hat, die aus mehreren Lagen von Windungen besteht, wofern nur letztere dem Magneten noch hinreichend nahe liegen.

Zu den Versuchen von van Rees zurückkehrend, schliessen wir aus dem letztgewonnenen Ergebnisse, dass jene für die Function A in der That dieselbe genäherte Form liefern, wie sie aus den Versuchen Coulomb's sich ergiebt.

Die Untersuchungen von Lenz und Jacobi (Ueber die Gesetze der Elektromagnete. Pogg. Ann. Bd. XLVII. LXI), deren zu gedenken noch erübrigt, sind gerichtet auf die Vertheilung des Magnetismus in einem cylindrischen Stabe aus weichem Eisen durch eine elektrische Spirale, deren aneinander liegende Windungen den Stab von dem einen Ende zum andern bedecken. Die genannten Forscher ermittelten in der Weise, wie wir es bei Beschreibung der Versuche von van Rees angegeben haben, den Strom, welcher in einer auf den Stab und den ihn bedeckenden Stromleiter geschobenen Inductionsspirale für verschiedene Lagen der letzteren durch das Verschwinden des Magnetismus entstand, wenn der magnetisirende Strom unterbrochen wurde. Die Ergebnisse, zu welchen Lenz und Jacobi durch ihre zahlreichen Versuche gelangten, lassen sich näherungsweise durch dieselbe Formel wie die von van Rees bei permanenten Magneten gewonnenen darstellen. Was sich hieraus hinsichtlich der magnetischen Vertheilung schliessen lasse, sollen die folgenden theoretischen Betrachtungen zeigen.

Die magnetische Wirkung einer elektrischen Spirale stellt sich, wie die Elektrodynamik lehrt, für den von der Spirale umschlossenen Raum dar durch die Resultante einer constanten mit der Axe der Spirale parallelen Kraft und der Kraft, welche von einer gleichförmigen Belegung beider Endflächen mit gewissen entgegengesetzt gleichen Mengen magnetischer Flüssigkeit ausgeht. Hiernach war die Magnetisirung der Stäbe bei den Versuchen von Lenz und Jacobi eine andere, als die in diesem Capitel bisher betrachtete. Aus einer zu Anfang gemachten Bemerkung geht aber sofort hervor, dass die Function U für den hier zu erörternden Fall aus der früher aufgestellten Form dadurch gewonnen wird, dass man das Glied f mit einem lediglich von den Dimensionen und der Inductionsconstante des Stabes abhängigen Coefficienten multiplicirt. Aus diesem Grunde sind denn auch die Versuche von Lenz und Jacobi, da überdies ein Theil der der Untersuchung unterworfenen Stäbe einen verhältnissmässig kleinen Durchmesser hatte, geeignet über den Verlauf der Function A Aufschluss zu geben. Um diesen zu gewinnen, fassen wir zunächst den Fall ins Auge, wo an die Stelle der Inductionsspirale ein einzelner Kreisleiter

tritt, welcher auf den magnetisch erregten Stab aufgeschoben ist. Man denke sich nun den letzteren durch die Ebene des Leiters in zwei Theile getheilt und diese Theile, ohne dass die Anordnung ihres Magnetismus geändert wird, längs ihrer Axe von dem Leiter fort ins Unendliche verschoben. Es erzeugt alsdann jeder der Theile in dem Leiter einen Integralstrom, und die Elektrodynamik lehrt, dass die Summe der Intensitäten dieser Ströme gleichkommt der Intensität des Stromes, welcher im Leiter durch das Verschwinden des ursprünglich im Stabe enthaltenen Magnetismus erzeugt wird. Wenn wir also durch ϱ_I und ϱ_{II} die Dichtigkeit der idealen Oberflächenladung auf den beiden ursprünglich aneinander stossenden Endflächen der Stücke bezeichnen, in welche wir den Stab getheilt denken, übrigens aber dieselbe Bezeichnung anwenden und dieselben Unterstellungen machen wie früher, so ergiebt sich folgender Ausdruck für die Intensität des fraglichen Integralstromes:

$$\frac{\varepsilon\pi\omega}{w}\Bigg\{\varrho_1(1-Q(a))-\varrho_2(1+Q(-a))+2\varrho_I-2\varrho_{II}$$
$$-\frac{2}{b}\Bigg[\int_{-a}^{z'}\varrho(1+Q(z))\,dz-\int_{z'}^{+a}\varrho(1-Q(z))\,dz\Bigg]\Bigg\}.$$

Nun hat man aber, wenn p den Coefficienten bedeutet, mit welchem nach einer vorhin gemachten Bemerkung jetzt das Glied f in dem früher für U aufgestellten Ausdrucke zu multipliciren ist, und wenn durch K die oben erwähnte constante Componente der von der elektrischen Spirale ausgehenden Kraft bezeichnet wird:

$$\varrho=-\frac{\varkappa K}{4\pi(1-\varkappa)}\cdot\frac{b}{2}\cdot p\,\frac{d^2A}{dz^2},$$
$$\varrho_1=-\varrho_2=-\frac{\varkappa K}{4\pi(1-\varkappa)}\left[1-p\left(\frac{dA}{dz}\right)_a\right],$$
$$\varrho_I=-\varrho_{II}=\frac{\varkappa K}{4\pi(1-\varkappa)}\left[1-p\left(\frac{dA}{dz}\right)_{z'}\right].$$

Hiernach findet man unter denselben Bedingungen, welche bei der entsprechenden Formel in der Erörterung der Versuche von van Rees unterstellt wurden, folgenden genäherten Ausdruck für die Intensität des inducirten Integralstromes:

$$\frac{\varepsilon \varkappa \omega K}{(1-\varkappa) w}\left[1-p\left(\frac{dA}{dz}\right)_{z'}\right].$$

Aus der letzten Formel ersehen wir aber im Hinblick auf das Vorhergehende ohne Weiteres, dass das Ergebniss der Versuche von Lenz und Jacobi zu derselben genäherten Form für die Function A führt, wie die übrigen bereits besprochenen Versuche.

V.

VOM DIAMAGNETISMUS.

Neben die Classe von isotropen Körpern, welche sich in Hinsicht des Magnetismus ähnlich verhalten wie das Eisen, stellt sich eine zweite Classe von Körpern, an denen wir wesentlich andere Inductions-Erscheinungen beobachten, wir meinen die Körper, welche sich ähnlich wie das Wismuth verhalten. Bringen wir eine Kugel aus Wismuth in ein magnetisches Feld mit divergirenden Kraftlinien, so wird dieselbe nach derjenigen Seite hin getrieben, nach welcher die Kraftlinien divergiren, während sich eine freie Kugel aus Eisen nach gerade entgegengesetzter Richtung bewegen würde. Ein Stück Wismuth von länglicher Form, wir wollen sagen, von der Gestalt eines verlängerten Revolutions-Ellipsoides, richtet sich im homogenen magnetischen Felde so, dass seine grosse Axe nicht, wie es beim Eisen der Fall sein würde, in die Richtung der Kraftlinien fällt, sondern dass sie senkrecht zu letzteren wird. Die magnetische Wirkung, welche das gedachte Stück in der erwähnten Gleichgewichtslage nach aussen hin offenbart, lässt sich durch die Wirkung einer verschwindend kleinen Magnetnadel ersetzen, die im Mittelpunkte des Ellipsoides liegt, deren Axe in die Richtung der Kraftlinien fällt, und deren Südpol nach derjenigen Seite hingekehrt ist, nach welcher sich ein Nordpol in dem inducirenden Felde bewegen würde. Die Polarität des influencirten Ellipsoides aus Wismuth ist hiernach derjenigen entgegengesetzt, welche ein gleiches Ellipsoid aus Eisen unter denselben Verhältnissen darbieten würde.

Die Körper, welche sich ähnlich wie Wismuth verhalten, nennt man nach Faraday, welcher das eigenthümliche Verhalten dieses Metalles zuerst genauer untersucht hat, diamagne-

tische Körper, diejenigen aber, welche dieselben Inductions-Erscheinungen wie das Eisen darbieten, paramagnetische Körper.

Die Formeln, welche wir im Vorhergehenden zur Erklärung der Inductionserscheinungen bei paramagnetischen Körpern aufgestellt haben, gelten auch — soweit die bisher bekannten Thatsachen schliessen lassen — für die diamagnetische Induction, nur muss bei letzterer der Constanten $\varkappa$ ein negativer Werth beigelegt werden. Was den absoluten Werth von $\varkappa$ betrifft, so ist derselbe bei allen dermalen untersuchten diamagnetischen Körpern ein sehr kleiner ächter Bruch.

Als Beleg hierfür erwähnen wir die Versuche Plücker's über das Verhältniss der Anziehung, welche das Eisen, und der Abstossung, welche das beziehungsweise stark diamagnetische Wismuth unter gleichen Umständen seitens eines inducirenden Magneten erleidet. (Ueber das Gesetz der Induction bei paramagnetischen und diamagnetischen Substanzen. Pogg. Annal. XCI). Ferner wollen wir ein Ergebniss der Versuche erwähnen, welche Weber über den Diamagnetismus des Wismuths angestellt hat, und daraus den Werth der Inductions-Constante dieses Metalles herleiten. (Elektrodynamische Maassbestimmungen, ins Besondere über den Diamagnetismus. Abhandlungen d. Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. I.). Derselbe bestimmte durch Vergleichung der Wirkungen auf die Nadel eines Spiegel-Magnetometers das Verhältniss zwischen dem magnetischen Momente eines cylindrischen Stabes aus Wismuth und dem eines geraden Drahtes oder Stäbchens aus Eisen, welche der vertheilenden Wirkung einer mit den Axen der Stäbe parallelen Kraft ausgesetzt waren. Der Wismuthstab, oder vielmehr jeder der beiden zur Verdoppelung der Wirkung angewandten Wismuthstäbe, war 9,2 Centimeter lang, 1,6 Centimeter dick und hatte ein Gewicht von 171,75 Grammen. Das Eisenstäbchen war ebenso lang, wog aber nur 0,0058 Gramm; sein Durchmesser betrug also — das specifische Gewicht des Eisens gleich 7,78 gesetzt — 0,01016 Centimeter. Es ergab sich, dass das Moment des Eisenstäbchens 49,67mal grösser war, als das des Wismuthstabes, wenn die vertheilende Kraft für die von uns gewählte Einheit nahe gleich 63 war.

Um auf die mitgetheilten Resultate eine Vergleichung der

Inductions-Constanten des Eisens und Wismuths zu gründen, machen wir die annähernd richtige Annahme, dass für das Moment eines cylindrischen Stabes mit vorherrschender Längen-Dimension, der von einer der Axe parallelen Kraft influencirt wird, das eines verlängerten Rotations-Ellipsoides von demselben Stoffe und gleichem Inhalte gesetzt werden könne, dessen Rotations-Axe der vertheilenden Kraft parallel ist und sich zur Queraxe verhält, wie die Länge des Stabes zu seiner Dicke. Für das Moment M eines solchen Ellipsoides hat man nach dem im vorhergehenden Kapitel Gesagten, wenn die dort gebrauchte Bezeichnung beibehalten wird:

$$M = \pm \frac{EK}{\mathfrak{A}^2},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, jenachdem die Constante $\varkappa$ zwischen Null und der positiven Einheit oder zwischen Null und der negativen Einheit liegt. Hieraus folgt, wenn l die Länge, d die Dicke des Cylinders bedeutet, an dessen Stelle das Ellipsoid substituirt wird:

$$16\,M = \pm \frac{d^2 l K}{\frac{1}{\varkappa} + s - 1},$$

wo man, unter σ den reciproken Werth der numerischen Excentricität des Ellipsoides, d. i. den Ausdruck $l : \sqrt{l^2 - d^2}$ verstanden, zu setzen hat:

$$s = \sigma(\sigma^2 - 1)\left\{\frac{1}{2} \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - \frac{1}{\sigma}\right\}.$$

Wenden wir die letzte Formel auf die mitgetheilten Versuche an, so erhalten wir, wenn wir die auf den Wismuthstab sich beziehenden Grössen durch accentuirte Buchstaben, die auf den Eisenstab sich beziehenden aber durch nicht accentuirte Buchstaben bezeichnen:

$$\frac{M}{M'} \cdot \frac{d'^2}{d^2} = - \frac{\frac{1}{\varkappa'} + s' - 1}{\frac{1}{\varkappa} + s - 1},$$

und es ist:

$$\frac{M}{M'} \cdot \frac{d'^2}{d^2} = 1231819, \quad s = 8 \,.\, 10^{-6}, \quad s' = 45923 \,.\, 10^{-6}.$$

Den Werth von $\varkappa$ wollen wir aus einer zweiten Versuchsreihe, welche Weber a. a. O. mittheilt, ableiten. Weber bestimmte

mittelst der an einem Magnetometer hervorgebrachten Ablenkung den absoluten Werth des Momentes, welches in einem cylindrischen Eisenstabe hervorgebracht wurde, als derselbe der Wirkung einer mit seiner Axe parallelen elektro-magnetischen Kraft von bekannter Grösse ausgesetzt wurde. Der zu diesen Versuchen dienende Stab war 10,02 Centimeter lang, 0,36 Centimeter dick und wog 8,19 Gramm. Als homogenes Feld diente der centrale Raum einer galvanischen Spirale, die nur so weit war, als zum Hineinlegen des Eisenstabes erforderlich war, und deren Enden so weit von denen des Stabes entfernt waren, dass in dem von letzterem eingenommenen Raume die Kraftlinien als mit der Axe der Spirale parallel angesehen werden durften (vergleiche hierüber die Elektrodynamik). Um die Einwirkung des elektrischen Stromes auf das Magnetometer zu eliminiren, wurde das Ende des Schraubendrahtes zweimal um die Mitte der Spirale in einem viel weiteren Kreise und in umgekehrter Richtung herumgewunden, so dass der von beiden Windungen begrenzte Flächenraum ebenso gross war, wie der von allen Windungen der engen Spirale begrenzte Flächenraum. Auf die Grösse der vertheilenden Kraft wurde aus der mittelst einer Tangentenboussole bestimmten Intensität des Stromes, den Verhältnissen der Spirale und der horizontalen Componente des Erdmagnetismus geschlossen. Es wurde nun für das Moment des Eisenstabes der Werth 746,2 gefunden, als die inducirende Kraft nahe gleich 65,9 und folglich um circa $\frac{1}{21}$ grösser, als die in den vorhergehends erwähnten Versuchen angewandte Kraft, war. Aus den Dimensionen des Eisenstabes berechnet sich aber:

$$s = 3905 \,.\, 10^{-6},$$

und hiernach liefert die für das Moment aufgestellte Näherungsformel, wenn wir für $d^2 l$ den aus dem absoluten und specifischen Gewichte des Stabes sich ergebenden Werth 1,3403 annehmen:

$$\varkappa = 0{,}99652.$$

Indem wir diesen Werth von $\varkappa$ zu Grunde legen, erhalten wir ferner, zu den auf die Induction im Wismuth sich beziehenden Versuchen von Weber zurückgehend:

$$\varkappa' = -\, 0{,}00023.$$

Wie bereits früher angedeutet wurde, ist nur für schwächere Kräfte die Annahme einer Inductions-Constante in der bisherigen Bedeutung als eine Annäherung an die Wirklichkeit zulässig. Es muss dahin gestellt bleiben, in wie weit sich die oben für $\varkappa$ und $\varkappa'$ gefundenen Werthe von denjenigen unterscheiden, welche für schwächere Kräfte gelten. Nehmen wir aber jene an, so ergiebt sich für das Verhältniss des magnetischen Momentes einer gleichförmig magnetisirten Kugel aus Eisen und einer durch eine gleiche Kraft magnetisirten und gleichgrossen Kugel aus Wismuth der Werth 12900. Das Verhältniss der magnetischen Momente zweier gleicher Rotations-Ellipsoide aus Eisen und Wismuth, die durch gleiche mit den Axen parallele Kräfte magnetisirt sind, nähert sich ferner dem Grenzwerthe 4330, wenn das einzelne Ellipsoid sich durch Abplattung einer Kreisscheibe nähert, und dem Grenzwerthe 1245000, wenn jedes der Ellipsoide sich durch Streckung einer geraden Linie nähert.

Das Verhalten der diamagnetischen Körper hat man dadurch aus dem Verhalten der paramagnetischen Körper zu erklären versucht, dass man annahm, der zwischen den Molecülen der wägbaren Körper frei bewegliche Aether sei einer stärkeren magnetischen Erregung fähig, als die diamagnetischen Körper an und für sich. Wendet man die in dem folgenden Capitel aufgestellten Formeln mit den dort gemachten Einschränkungen auf das System der Molecüle eines starren Körpers mit sehr kleiner positiver Inductions-Constante und eine incompressible Flüssigkeit an, welche die Zwischenräume der Molecüle und den ausserhalb des Körpers befindlichen Raum erfüllt und eine gleichfalls sehr kleine positive Inductions-Constante besitzt, so ergiebt sich in der That, dass die Gesammteinwirkung, welche der Körper erleidet, dieselbe ist, wie wenn die Flüssigkeit nicht vorhanden wäre und seine Inductions-Constante gleichkäme der wirklichen Constante des Körpers an und für sich, vermindert um die Constante der Flüssigkeit. Hinsichtlich der Gründe, die man für und gegen die erwähnte Annahme beigebracht hat, verweisen wir den Leser auf die betreffende physikalische Litteratur.

VI.

NÄHERUNGSFORMELN FÜR DIE INDUCTION DES MAGNETISMUS IN EINEM MITTEL MIT SEHR KLEINER INDUCTIONS-CONSTANTE. ANWENDUNG DIESER FORMELN BEI FLÜSSIGEN KÖRPERN.

Wenn es sich um die Magnetisirung eines Körpers handelt, dessen Inductions-Constante $\varkappa$ sehr klein ist, so wird es gestattet sein, für gewisse Zwecke den Inductionsprocess als schon mit dem ersten Acte abgeschlossen zu betrachten, oder von der gegenseitigen Induction der Molecüle abzusehen. Dieser Grad der Annäherung ist aber offenbar nicht zureichend bei Erörterung solcher Erscheinungen, welche wesentlich auf der letzterwähnten Induction beruhen; er würde also z. B. bei der Bestimmung des mechanischen Verhaltens eines Ellipsoides, welches sich in einem homogenen magnetischen Felde befindet, zu unrichtigen Resultaten führen.

Bei Vernachlässigung der gegenseitigen Beeinflussung der Molecüle hat man zu setzen:

$$U = V,$$

und hieraus findet man für die Dichtigkeit der idealen Oberflächenladung, welche die Wirkung des magnetisirten Körpers nach aussen hin zu ersetzen im Stande ist:

$$\varrho = -\frac{\varkappa}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dn}.$$

Jene Dichtigkeit wird also hiermit der Componente der vertheilenden

Kraft nach der auswärts gerichteten Normale des betreffenden Oberflächenelementes proportional.

Für den bezeichneten Grad der Annäherung lässt sich leicht die Kraft bestimmen, welche seitens des gesammten in Betracht kommenden Magnetismus auf ein Element des Körpers einwirkt, indem nur derjenige Theil jener Kraft zu berücksichtigen ist, welcher unmittelbar vom Inducenten herrührt. Die fragliche Kraft ist, wie man leicht einsieht, von der blossen Form des Elementes unabhängig. Mit Rücksicht hierauf wollen wir zur Vereinfachung der Betrachtungen ein Element ins Auge fassen, welches wie folgt begrenzt ist. Es sei dS ein Element einer Niveaufläche des inducirenden Potentiales V. Durch die Punkte des Umfanges des Elementes lege man die Kraftlinien, und diese mögen auf einer zweiten Niveaufläche, welche die erste einschliesst und ihr unendlich nahe ist, das Element dS' bestimmen. Die Flächenelemente dS, dS' und die genannten Kraftlinien seien nun die Grenzen des zu betrachtenden Körperelementes dk. Die Wirkung des Inducenten auf das Körperelement kann durch die auf eine magnetische Belegung des Elementes dS von der Dichtigkeit $+\frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\frac{dV}{dN}$ und eine Belegung des Elementes dS' von der Dichtigkeit $-\frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\frac{dV'}{dN'}$ ersetzt werden, wenn durch $\frac{dV}{dN}$ und $\frac{dV'}{dN'}$, die Steigung des Potentiales nach der auswärts gerichteten Normale der Niveaufläche in einem Punkte von dS und dS' bezeichnet wird. Es seien ferner x, y, z die Coordinaten eines Punktes P von dS und $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ die Coordinaten des Punktes P', in welchem dS' von der durch den ersten Punkt gehenden Kraftlinie geschnitten wird; das zwischen P und P' liegende Element der Kraftlinie sei dN.

Die Wirkung des Inducenten auf den im Elemente dk enthaltenen Magnetismus lässt sich darstellen durch die Kraft $\frac{\varkappa}{4\pi}\left(\frac{dV}{dN}\right)^2 dS$, welche in P angreift und nach der einwärts gerichteten Normale von dS wirkt, und die Kraft $\frac{\varkappa}{4\pi}\left(\frac{dV'}{dN'}\right)^2 dS'$, welche in P' angreift und nach der auswärts gerichteten Normale von dS'

wirkt. Beide Kräfte setzen sich zu einer in der Osculationsebene der Kraftlinie gelegenen Kraft zusammen, und wenn wir die Componenten dieser Kraft nach den Coordinatenaxen durch $X\,dk$ u. s. f. bezeichnen, so ist:

$$X\,dk = \frac{\varkappa}{4\pi}\left(\frac{dV'}{dx'}\cdot\frac{dV'}{dN'}dS' - \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dV}{dN}dS\right),$$

wo $\frac{dV'}{dx'}$ das bedeutet, was aus $\frac{dV}{dx}$ wird, wenn die Coordinaten um dx, dy, dz wachsen. Da aber ferner:

$$\frac{dV'}{dN'}dS' - \frac{dV}{dN}dS = \Delta^2 V\,dk = 0$$

ist (Elektrost. II.), so kommt:

$$X\,dk = \frac{\varkappa}{4\pi}\left(\frac{d^2V}{dx^2}dx + \frac{d^2V}{dx\,dy}dy + \frac{d^2V}{dx\,dz}dz\right)\frac{dV}{dN}dS$$

$$= \frac{\varkappa}{4\pi}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dN} + \frac{d^2V}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dN} + \frac{d^2V}{dx\,dz}\cdot\frac{dz}{dN}\right)\frac{dV}{dN}dk$$

$$= \frac{\varkappa}{4\pi}\left(\frac{dV}{dx}\cdot\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{dV}{dy}\cdot\frac{d^2V}{dx\,dy} + \frac{dV}{dz}\cdot\frac{d^2V}{dx\,dz}\right)dk.$$

Hiernach hat man also endlich:

$$X = \frac{\varkappa}{8\pi}\cdot\frac{d\left(\frac{dV}{dN}\right)^2}{dx},\quad Y = \frac{\varkappa}{8\pi}\cdot\frac{d\left(\frac{dV}{dN}\right)^2}{dy},\quad Z = \frac{\varkappa}{8\pi}\cdot\frac{d\left(\frac{dV}{dN}\right)^2}{dz}.$$

Wir ersehen hieraus, dass sich die Componenten der fraglichen Kraft in analoger Weise durch die partiellen Differentialquotienten der Function $\left(\frac{dV}{dN}\right)^2$ nach den Coordinaten darstellen lassen, wie die Componenten der Gravitationskräfte u. s. f. durch die Differentialquotienten der Potentialfunction. Die Kraft steht also auch in jedem Punkte auf derjenigen durch den Punkt gehenden Fläche senkrecht, welche zu den durch die Gleichungsform:

$$\left(\frac{dV}{dN}\right)^2 = const.$$

dargestellten Flächen gehört, in deren Punkten die vertheilende Kraft denselben absoluten Werth aufweist. Im Allgemeinen fällt also die Kraft keineswegs in die Richtung der vertheilenden Kraft; in den Punkten einer geraden Kraftlinie aber, also z. B. in dem magnetischen Felde eines einzelnen Poles, fallen jene Kräfte zusammen.

Die Wirkungen des Inducenten auf die einzelnen Körpertheilchen setzen sich zu derselben Gesammtwirkung auf den Körper zusammen, wie die Wirkungen des Inducenten auf die einzelnen Theile der idealen Oberflächenladung. Um uns hiervon ohne auf das Frühere zurückzugehen zu überzeugen, bemerken wir, dass sich die Gesammtarbeit der Resultante von X, Y, Z, wie sie einer beliebigen unendlich kleinen Versetzung des Körpers entspricht, durch die correspondirende Aenderung des Ausdruckes:

$$\frac{\varkappa}{8\pi}\int\left(\frac{dV}{dN}\right)^2 dk = \frac{\varkappa}{8\pi}\int V\frac{dV}{dn}ds$$

bestimmt. Hiernach und mit Rücksicht auf den Ausdruck für ϱ genügt es offenbar zu zeigen, dass wenn in letzterem Ausdrucke V um die unendlich kleine Grösse δV, für welche $\varDelta^2 \delta V$ im Innern des Körpers allenthalben verschwindet, variirt wird, die Variation desselben mit

$$\frac{\varkappa}{4\pi}\int \delta V \cdot \frac{dV}{dn}ds$$

zusammenfällt. Nun ist aber:

$$\delta\int V\frac{dV}{dn}ds = \int \delta V\frac{dV}{dn}ds + \int V\frac{d\delta V}{dn}ds,$$

und nach einem früher (Elektrost.) aufgestellten Satze sind die beiden letzten Integrale einander gleich; in der That ist also auch:

$$\delta\frac{\varkappa}{8\pi}\int V\frac{dV}{dn}ds = \frac{\varkappa}{4\pi}\int \delta V\frac{dV}{dn}ds.$$

Bekanntlich hat Faraday entdeckt, dass auch die flüssigen Körper der magnetischen Erregung fähig sind, und aus seinen sowie aus Plücker's Versuchen darf, was ins Besondere die tropfbar-flüssigen Körper betrifft, geschlossen werden, dass für die oben näher bezeichneten Einschränkungen die Art der Magnetisirung einer tropfbaren, homogenen Flüssigkeit, welche sich unter der Einwirkung eines Magneten und im Gleichgewichte befindet, wesentlich dieselbe ist, wie bei einem isotropen festen Körper mit derselben Begrenzung. Mittelst der oben gewonnenen Formeln können nun nach den Regeln der Hydrostatik die Bedingungen für das Gleichgewicht einer magnetisch erregten, homogenen und incompressiblen Flüssigkeit aufgestellt werden. Wir beschränken uns auf den Fall, wo

ausser der magnetischen Kraft und den an der Oberfläche wirkenden Druckkräften nur noch eine Kraft auftritt, deren Componenten sich durch die partiellen Differentialquotienten einer Function der Coordinaten nach den letzteren darstellen lassen, wie solches z. B. bei Gravitationskräften der Fall ist. Die Componenten der auf die Volumeneinheit bezogenen magnetischen Kraft seien wie oben X, Y, Z, die Componenten der auf die Masseneinheit bezogenen zweiten Kraft seien X', Y', Z', das specifische Gewicht der Flüssigkeit werde durch s und der hydrostatische Druck durch p bezeichnet. Man hat alsdann:

$$\frac{dp}{dx} = X + sX', \quad \frac{dp}{dy} = Y + sY', \quad \frac{dp}{dz} = Z + sZ',$$

und hieraus folgt durch Integration, wenn V das Potential des Inducenten, $\varkappa$ die Inductions-Constante der Flüssigkeit und Φ die Function ist, deren partielle Differentialquotienten die Componenten X' u. s. f. liefern:

$$p = c + \frac{\varkappa}{8\pi}\left(\frac{dV}{dN}\right)^2 + s\Phi,$$

wo c die Integrations-Constante bedeutet.

Von den wichtigeren und zugleich näher liegenden Consequenzen der letzten Gleichung mögen hier die folgenden hervorgehoben werden.

Die freie Oberfläche einer incompressiblen Flüssigkeit, welche nur von magnetischen Kräften sollicitirt wird, nimmt, wenn sie einen allenthalben gleichen Druck erleidet, stets die Gestalt einer der Flächen an, welche durch die Gleichungsform:

$$\left(\frac{dV}{dN}\right)^2 = const.$$

dargestellt werden. Geht z. B. die Induction von einem Pole aus, so wird die freie Oberfläche sphärisch und ihr Mittelpunkt kommt in den Pol zu liegen. Hierbei kann die flüssige Masse je nach den Umständen an der freien Oberfläche sowohl convex, als auch concav sein, und es ist leicht zu bestimmen, wann das eine oder das andere eintreten müsse. Als ein zweites hierher gehöriges einfacheres Beispiel erwähnen wir das einer flüssigen Masse mit einem festen, sphärischen Kern, der die Rolle des Inducenten spielt und gleichförmig permanent magnetisirt ist.

Wenn die Flüssigkeit ausser der magnetischen Einwirkung nur noch die der Schwerkraft erleidet, so ist zu setzen:

$$\Phi = -gz,$$

wo g die Schwerkraft bedeutet, also für die von uns gewählten Einheiten gleich 980,8 ist, und vorausgesetzt wird, dass die z-Coordinaten in der der Schwerkraft entgegengesetzten Richtung gerechnet werden. Hiernach kommt für die Gleichung der freien Oberfläche, wenn letztere, wie es gewöhnlich der Fall ist, allenthalben unter gleichem Drucke steht:

$$z - \frac{\varkappa}{8 g s \pi}\left(\frac{dV}{dN}\right)^2 = const.$$

Geht beispielshalber die Induction von einem einzelnen Pole aus und wird die Entfernung von letzterem durch r, das in ihm enthaltene magnetische Quantum durch Q bezeichnet, so wird die Gleichung der freien Oberfläche bei gehöriger Wahl des Coordinaten-Anfangspunktes:

$$r^4 z = \frac{\varkappa Q^2}{8 g s \pi}.$$

Indem wir uns auf den Fall beschränken, wo der absolute Werth des rechts stehenden Ausdruckes sehr klein ist, und daher die bei Abwesenheit der magnetischen Wirkung ebene Oberfläche durch den Magnetpol nur sehr wenig modificirt wird, schliessen wir aus der letzten Gleichung Folgendes. Die freie Oberfläche einer paramagnetischen Flüssigkeit erhebt sich, wenn man nach dem durch den Pol gehenden Lothe hin fortschreitet; sie ist in der Nähe dieses Lothes nach oben hin convex-convex, in einer gewissen Entfernung wird sie convex-concav und mit wachsender Entfernung nähert sie sich asymptotisch der horizontalen xy-Ebene. An die Stelle der erwähnten Erhebung tritt bei einer diamagnetischen Flüssigkeit eine Senkung; hier ist die Oberfläche in der Nähe des durch den Pol gehenden Lothes concav-concav und von einer gewissen Entfernung ab concav-convex. Die Entfernung z des bezüglich höchsten oder tiefsten Punktes der Oberfläche von der genannten Asymptoten-Ebene ist die der Null am nächsten gelegene reelle Wurzel der folgenden Gleichung, in welcher z_0 die Entfernung des Poles von derselben Ebene bedeutet:

$$z(z_0 - z)^4 = \frac{\varkappa Q^2}{8 g s \pi}.$$

Wenn $\varkappa$ positiv ist, hat diese Gleichung ausser der erwähnten Wurzel zwei reelle Wurzeln, welche nahe gleich z_0 sind, und zwar ist die eine von ihnen grösser, die andere kleiner als z_0. Es beziehen sich diese Wurzeln, wie leicht zu ersehen, auf das Gleichgewicht eines Tropfens einer paramagnetischen Flüssigkeit, welcher den inducirenden Pol einschliesst und durch die Anziehung des letztern am Fallen verhindert wird.

Dass die ursprünglich ebene freie Oberfläche einer schweren Flüssigkeit in einem magnetischen Felde, welches annähernd als das eines Poles betrachtet werden kann, auch annähernd die oben beschriebenen Modificationen unter den angegebenen Umständen erleiden werde, darf mit Bestimmtheit nach Analogie aus den Versuchen geschlossen werden, welche Plücker (Experimental-Untersuchungen über die Wirkung der Magnete auf gasförmige und tropfbare Flüssigkeiten. Pogg. Ann. Bd. LXXIII) über die Magnetisirung flüssiger Körper mitgetheilt hat.

Wir wollen endlich hier noch das Verhalten einer tropfbar flüssigen, gravitirenden Masse erörtern, welche einen starren Kern allenthalben umgiebt und durch einen beliebigen Inducenten magnetisch erregt wird, während wir von dem eingeschlossenen Körper der Einfachheit wegen annehmen, dass er keine magnetische Induction in seiner Masse gestattet. Die auswärts gerechnete Normale des eingeschlossenen Körpers werde durch n, die der äusseren Oberfläche der Flüssigkeit durch n_1 bezeichnet. Man hat alsdann für die Dichtigkeiten ϱ, ϱ_1 der idealen magnetischen Ladungen der genannten Flächen:

$$\varrho = \frac{\varkappa}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dn}, \quad \varrho_1 = -\frac{\varkappa}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dn_1}.$$

Die erste Dichtigkeit ist entgegengesetzt gleich der Dichtigkeit, welche sich für die Oberfläche einer flüssigen Masse ergäbe, die, von derselben Beschaffenheit wie die betrachtete, das Volumen des festen Körpers ausfüllt. Für den hydrostatischen Druck an der Oberfläche jener fictiven flüssigen Masse ergiebt sich derselbe Ausdruck, wie für den hydrostatischen Druck, welchen die Oberfläche des festen Körpers seitens der umgebenden Flüssigkeit erleidet. Hieraus folgt, dass die Ge-

sammtwirkung, welche die Flüssigkeit auf den eingetauchten starren Körper ausübt, entgegengesetzt gleich der Wirkung ist, welche der Körper erlitte, wenn er dasselbe specifische Gewicht und dieselbe Inductions-Constante wie die ihn umgebende Flüssigkeit hätte. Was ins Besondere die magnetischen Kräfte allein betrifft, so kann man auch sagen, dass die Einwirkung, welche der starre Körper seitens der Flüssigkeit und in Folge der Einwirkung des Inducenten auf letztere erleidet, dieselbe ist wie die, welche er seitens des Inducenten erlitte, wenn er eine Inductions-Constante besässe, welche der der Flüssigkeit entgegengesetzt gleich ist. Dies Ergebniss stimmt innerhalb der für dasselbe bestehenden Grenzen mit der Erfahrung überein und fällt ersichtlich in der ersten Formulirung innerhalb derselben Grenzen mit dem von Plücker (Ueber den Einfluss der Umgebung eines Körpers auf die Anziehung oder Abstossung, die er durch einen Magneten erfährt. Pogg. Ann. Bd. LXXIII) aufgestellten Satze zusammen, wonach die Anziehung eines paramagnetischen oder die Abstossung eines diamagnetischen Körpers, der in eine paramagnetische Flüssigkeit eingetaucht wird, um ebenso viel bezüglich ab- oder zunimmt, als die magnetische Anziehung der verdrängten Flüssigkeit vor dem Eintauchen betrug, während bei einer diamagnetischen Flüssigkeit die Anziehung oder Abstossung bezüglich um ebenso viel zu- oder abnimmt, als die Abstossung der verdrängten Flüssigkeit betrug.

Schliesslich möge hier noch erwähnt werden, dass sich für den hydrostatischen Druck einer gasförmigen Flüssigkeit in einem magnetischen Felde, wenn allenthalben in derselben gleiche Temperatur herrscht und wenn es gestattet ist, die Grösse $\varkappa$ wie die Grösse s mit dem Drucke proportional zu setzen, ergiebt:

$$p = c e^{\frac{\varkappa_1}{8\pi}\left(\frac{dV}{dN}\right)^2 + s_1 \Phi},$$

wo $\varkappa_1$, s_1 die dem Drucke Eins entsprechenden Werthe von $\varkappa$ und s bedeuten, e die Basis der natürlichen Logarithmen und c eine Integrations-Constante ist.

VII.

MAGNETISCHE INDUCTION IN KRYSTALLINISCHEN MITTELN.

1. Verallgemeinerung der für isotrope Körper gültigen Formeln.

Das Potential des Magnetismus, welcher in dem Elemente eines krystallinischen Körpers inducirt wird, wenn eine gegenseitige Einwirkung der Molecüle nicht stattfindet, lässt sich, wie wir im IV. Kapitel gesehen haben, durch gehörige Richtung des rechtwinkligen Coordinatensystemes stets auf die Form des folgenden Ausdruckes bringen:

$$-\left\{\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dV}{dx'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}+\frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{dV}{dy'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'}+\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{dV}{dz'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'}\right\}dk.$$

Es bedeutet aber hier V das Potential des Inducenten, dk das Volumen des influencirten Elementes mit den Coordinaten x', y', z'. Ferner sind α^2, β^2, γ^2 drei von der Beschaffenheit des Körpers abhängige Constanten, die dem nächst Vorhergehenden zufolge sowohl positiv als negativ sein können. Durch r endlich ist die Entfernung von dem Punkte, auf welchen sich das Potential bezieht, bezeichnet.

Indem wir es dem Leser überlassen, gewisse naheliegende Schlüsse über die Beziehungen zwischen der Krystallform, der Lage der Coordinatenaxen und den drei gedachten Constanten zu ziehen und mit den Ergebnissen der später zu erwähnenden Versuche zu vergleichen, wollen wir vor Allem den aufgeführten Ausdruck

für das Potential des in einem Elemente ohne Wechselwirkung der Molecüle inducirten Magnetismus auf eine Form bringen, welche der bei der Induction in isotropen Mitteln in Anwendung gebrachten analog ist. Zu dem Ende werde die Fläche zweiten Grades zu Hülfe genommen, deren Halbaxen α, β, γ sind und, in die Coordinatenaxen fallend, mit den sogenannten Inductionsaxen, d. i. den Richtungen der Coordinatenaxen in ihrer oben näher angegebenen ausgezeichneten Lage, parallel laufen. Die Gleichung der Hülfsfläche ist, wenn wir ihren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfallen lassen:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1.$$

Es sei q derjenige Radius der Hülfsfläche, welcher mit der Normale parallel ist, die in dem Punkte (x', y', z') auf der durch eben diesen Punkt gelegten Niveaufläche des Potentiales V senkrecht steht. Ebenso sei q' der Radius, welcher dieselbe Richtung hat wie die Kraftlinie des Potentiales $\frac{1}{r}$ im Punkte $(x', y', z',)$ d. h. wie die Linie, welche das Centrum der r mit dem Elemente dk verbindet. Es mögen ferner in den Endpunkten der Radien q und q' Tangentialebenen an die Hülfsfläche gelegt, aus dem Mittelpunkte Perpendikel auf diese Ebenen gefällt und dieselben durch p und p' bezeichnet werden. Wenn dann endlich noch ε den Winkel zwischen p und q', ε' den Winkel zwischen p' und q bezeichnet, so kann, wie leicht einzusehen, für das Potential des in einem Elemente ohne Wechselwirkung der Molecüle inducirten Magnetismus geschrieben werden:

$$-\frac{\cos\varepsilon}{pq}\cdot\frac{dV}{dN}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}}\,dk = -\frac{\cos\varepsilon'}{p'q'}\cdot\frac{dV}{dN}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}}\,dk,$$

wo N und N wie früher die auswärts gerechneten Normalen der Gleichgewichtsflächen von V und $\frac{1}{r}$ für den Punkt (x', y', z') bedeuten.

Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Induction in einem beliebig begrenzten krystallinischen Körper mit endlichen Dimensionen über. Das Potential des Inducenten sei V.

Für das Potential des Magnetismus, welcher im ersten In-

ductionsacte erzeugt wird, d. h. für das Potential des Magnetismus, wie er durch den Inducenten hervorgerufen würde, wenn eine gegenseitige Beeinflussung der Molecüle nicht stattfände, hat man alsdann:

$$S = -\int \frac{\cos\varepsilon}{pq} \cdot \frac{dV}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}}\, dk,$$

wo die Integration sich über alle Elemente des Körpers erstreckt.

Der zweite Inductionsact besteht darin, dass in dem einzelnen Molecüle durch den in den übrigen Molecülen bereits erzeugten Magnetismus weiterhin neuer Magnetismus hervorgerufen wird. Es fragt sich nun, welches die Scheidungskraft sei, die, von allen übrigen Molecülen ausgehend, das einzelne Molecül für sich fernerhin erregt. Um das einzelne Molecül denken wir uns eine Hülfsfläche mit sehr kleinen Dimensionen gelegt, deren Gestalt einstweilen noch unbestimmt bleibe. Dem Magnetismus derjenigen Molecüle, welche ausserhalb der Hülfsfläche liegen, entspricht im Inneren dieser Fläche eine gewisse Scheidungskraft, und wie bei den isotropen Mitteln nehmen wir an, dass die Grenze, welcher sich letztere nähert, wenn die Dimensionen der Hülfsfläche kleiner und kleiner werden, diejenige Kraft ist, durch welche das fragliche Molecül seitens der übrigen Molecüle influencirt wird, wofern nur die Form der Hülfsfläche gehörig gewählt wird; soviel leuchtet aber von vornherein ein, dass letztere Fläche in Bezug auf drei mit den Coordinatenebenen parallele Ebenen symmetrisch sein und in eine Kugelfläche übergehen muss, wenn die drei Constanten α, β, γ einander gleich werden. Bezeichnen wir durch dk' das Volumenelement der genannten Hülfsfläche, so entspricht also die fragliche Scheidungskraft derjenigen Potentialfunction, welcher sich der Ausdruck:

$$-\int \frac{\cos\varepsilon}{pq} \cdot \frac{dV}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}}\, dk + \int \frac{\cos\varepsilon}{pq} \cdot \frac{dV}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}}\, dk'$$

für einen Punkt innerhalb der Hülfsfläche beim Verschwinden der letzteren nähert, hierbei unterstellt, dass das erste Integral

über alle Elemente des influencirten Körpers, das zweite über alle Elemente der Hülfsfläche sich erstrecke.

Die Grenze des zweiten Integrales in dem letzten Ausdrucke, oder die des Integrales:

$$\int\left\{\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dV}{dx'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}+\frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{dV}{dy'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'}+\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{dV}{dz'}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'}\right\}dk'$$

ist offenbar dieselbe wie die des folgenden Ausdruckes:

$$-\left\{\frac{1}{\alpha^2}\cdot\left(\frac{dV}{dx}\right)_0\int\frac{\cos\mathfrak{a}}{r^2}\,dk'+\frac{1}{\beta^2}\cdot\left(\frac{dV}{dy}\right)_0\int\frac{\cos\mathfrak{b}}{r^2}\,dk'\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\gamma^2}\cdot\left(\frac{dV}{dz}\right)_0\int\frac{\cos\mathfrak{c}}{r^2}\,dk'\right\},$$

wo sich die vor den Integralen stehenden Differentialquotienten auf den Mittelpunkt der Hülfsfläche beziehen und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Winkel bedeuten sollen, welche die vom Centrum der r nach dk' gezogene Linie mit den Coordinatenaxen bildet. Die Integrale können aber aufgefasst werden als die mit den Axen parallelen Componenten der Anziehung, welche die Masse Eins, in das Centrum der r concentrirt, seitens der gleichförmig mit Masse von der Dichtigkeit Eins erfüllten Hülfsfläche erleidet, die Attractionsconstante gleich Eins gesetzt.

Hinsichtlich der Hülfsfläche machen wir die durch den Erfolg gerechtfertigte und nahe liegende Annahme, dass sie von ellipsoidischer Form und ihre Axen nach den Inductionsaxen orientirt seien. Alsdann erhält man für den letzten Ausdruck, wenn sich die Axen der Hülfsfläche wie $a:b:c$ verhalten, wenn ferner A, B, C die Anziehungen sind, welche die Masse Eins seitens eines Ellipsoides mit den Halbaxen a, b, c in den Scheiteln der letzteren erleidet, die Dichtigkeit des Ellipsoides sowie die Attractionsconstante gleich Eins gesetzt, und wenn sich endlich x_0, y_0, z_0 auf den Mittelpunkt der Hülfsfläche, x, y, z auf das Centrum der r beziehen:

$$\frac{1}{\alpha^2}\cdot\left(\frac{dV}{dx}\right)_0\cdot\frac{A}{a}(x-x_0)+\frac{1}{\beta^2}\cdot\left(\frac{dV}{dy}\right)_0\cdot\frac{B}{b}(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{\gamma^2}\cdot\left(\frac{dV}{dz}\right)_0\cdot\frac{C}{c}(z-z_0).$$

Wir machen jetzt ferner noch in Betreff der Axenverhältnisse der Hülfsfläche die Annahme, dass die drei Ausdrücke:

$$\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{A}{a},\ \frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{B}{b},\ \frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{C}{c}$$

einander gleich seien, und setzen für ihren Werth $\frac{4\pi}{3\omega^2}$. Hierdurch geht der letzte Ausdruck in den folgenden über:

$$\frac{4\pi}{3\omega^2}\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{dV}{dy}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{dV}{dz}\right)_0(z-z_0)\right\}.$$

Die Kraft, welche dieser Potentialfunction entspricht, fällt nun für die Punkte der verschwindenden Hülfsfläche mit der des Potentiales $\frac{4\pi}{3\omega^2}V$ zusammen, und hieraus folgt endlich, dass die Potentialfunction:

$$-\int\frac{\cos\varepsilon}{pq}\cdot\frac{dV}{dN}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}}dk+\frac{4\pi}{3\omega^2}V$$

für den zweiten Inductionsact genau dieselbe Rolle spielt, wie das Potential V des Inducenten für den ersten Inductionsact.

Durch Fortsetzung der vorhergehenden Betrachtungen, d. h. indem man von dem zweiten zum dritten Inductionsacte u. s. f. in gleicher Weise wie vom ersten zum zweiten fortschreitet, gelangt man schliesslich zu folgendem Resultate: Der magnetische Zustand, welchen der Inducent mit dem Potentiale V in dem krystallinischen Körper hervorruft, ist derselbe, wie er durch ein gewisses Potential U hervorgerufen würde, wenn eine gegenseitige Einwirkung der Molecüle nicht stattfände, und zwar ist:

$$1.)\quad U=\sum_0^\infty V_\nu+C,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet, in dem Summensymbole V_0 für V gesetzt ist und wo die einzelnen Glieder der Summe nach dem folgenden recurrenten Gesetze gebildet sind:

$$V_\nu=-\int\frac{\cos\varepsilon}{pq}\cdot\frac{dV_{\nu-1}}{dN}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}}dk+\frac{4\pi}{3\omega^2}V_{\nu-1}.$$

Das Integral erstreckt sich über sämmtliche Elemente des influencirten Körpers und die im Integranden auftretenden Grössen haben für das einzelne Element dieselbe Bedeutung, wie in der anfangs stehenden Formel für das Potential des

Magnetismus, welcher in einem Elemente inducirt würde, wenn die gegenseitige Einwirkung der Molecüle nicht ins Spiel träte. Die Constante ω ist bestimmt, sobald die drei Constanten α, β, γ gegeben sind, und zwar durch folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{4\pi}{3\omega^2} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{A}{a} = \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{B}{b} = \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{C}{c}.$$

Dem für V_ν aufgestellten Ausdrucke lässt sich noch eine andere bemerkenswerthe Form geben. Durch Verallgemeinerung des Green'schen Lehrsatzes (s. Elektrostatik II.) erhalten wir, wenn wir die dort angewandte Bezeichnung beibehalten:

$$\int G\left\{\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{d^2H}{dx^2} + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{d^2H}{dy^2} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{d^2H}{dz^2}\right\} dk =$$

$$\int G\left\{\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{dH}{dx} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{dH}{dy} \cdot \frac{dy}{dn} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{dH}{dz} \cdot \frac{dz}{dn}\right\} ds$$

$$-\int\left\{\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{dG}{dx} \cdot \frac{dH}{dx} + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{dG}{dy} \cdot \frac{dH}{dy} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{dG}{dz} \cdot \frac{dH}{dz}\right\} dk.$$

Es werde nun in der schon erwähnten Hülfsfläche zweiten Grades mit den Halbaxen α, β, γ der Radius q parallel mit der Normale der zu der Potentialfunction H gehörigen Gleichgewichtsfläche gezogen, in dem Endpunkte des Radius eine Tangentialebene an die Fläche gelegt und aus dem Centrum das Perpendikel p auf jene Ebene herabgelassen. Ferner werde durch ε der Winkel zwischen p und der Normale der zu G gehörigen Niveaufläche bezeichnet, sowie durch ζ der Winkel zwischen p und der Normale von ds. Alsdann lässt sich für die letzte Formel schreiben:

$$\int G \Delta_1^2 H dk =$$

$$\int \frac{\cos\zeta}{pq} \cdot G \cdot \frac{dH}{dh} ds - \int \frac{\cos\varepsilon}{pq} \cdot \frac{dG}{dg} \cdot \frac{dH}{dh} dk,$$

wo unter $\Delta_1^2 \,..$ der Ausdruck: $\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{d^2 \,..}{dx^2} + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{d^2 \,..}{dy^2} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \,..}{dz^2}$ verstanden werde, so dass:

$$\Delta_1^2 H = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{d^2H}{dx^2} + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{d^2H}{dy^2} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{d^2H}{dz^2}$$

ist, und wo sich die Grössen ζ, p, q im vorletzten Integrale auf die durch einen Punkt des Elementes ds gehende Gleichgewichtsfläche, ihre durch denselben Punkt gehende Normale und die

Normale von ds beziehen, sowie in dem letzten Integrale die Grössen ε, p, q auf die Normalen zu beziehen sind, die an der Stelle des Elementes dk auf den durch eben dieses Element gehenden Niveauflächen von G und H senkrecht stehen. — Aus der letzten Formel aber findet man leicht, dass für eine jede Lage des Centrums der r und wenn V eine Potentialfunction bedeutet, ist:

$$\int \frac{\Delta_1^2 V}{r} dk = \int \frac{\frac{\cos\zeta}{pq} \cdot \frac{dV}{dN}}{r} ds - \int \frac{\cos\varepsilon}{pq} \cdot \frac{dV}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}} dk.$$

Mit Rücksicht auf letztere Relation können wir setzen:

$$V_\nu = \int \frac{\Delta_1^2 V_{\nu-1}}{r} dk - \int \frac{\frac{\cos\zeta}{pq} \cdot \frac{dV_{\nu-1}}{dN}}{r} ds + \frac{4\pi}{3\omega^2} V_{\nu-1}.$$

Was das Potential des in dem krystallinischen Körper inducirten Magnetismus betrifft, so kommt für dasselbe:

$$T = \sum_0^\infty S_\nu,$$

wo die Bildung der einzelnen Glieder durch folgende Formel bestimmt wird:

$$S_\nu = -\int \frac{\cos\varepsilon}{pq} \cdot \frac{dV_\nu}{dN} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}} dk,$$

oder mit Rücksicht auf den vorher gefundenen Satz:

$$S_\nu = \int \frac{\Delta_1^2 V_\nu}{r} dk - \int \frac{\frac{\cos\zeta}{pq} \cdot \frac{dV_\nu}{dN}}{r} ds.$$

Man bemerke nun, dass man hat:

$$\sum \frac{\cos\zeta}{pq} \cdot \frac{dV_\nu}{dN} = \sum \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{dV_\nu}{dx} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{dV_\nu}{dy} \cdot \frac{dy}{dn} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{dV_\nu}{dz} \cdot \frac{dz}{dn} \right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{d\Sigma V_\nu}{dx} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{d\Sigma V_\nu}{dy} \cdot \frac{dy}{dn} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{d\Sigma V_\nu}{dz} \cdot \frac{dz}{dn}.$$

Mit Rücksicht auf diese Beziehung findet man, wenn die Normale der zu U gehörenden Niveaufläche durch $\mathfrak{N}$ bezeichnet wird:

$$2.)\quad T = \int \frac{\Delta_1^2 U}{r} dk - \int \frac{\frac{\cos\zeta}{pq} \cdot \frac{dU}{d\mathfrak{N}}}{r} ds,$$

wo die Grössen ζ, p, q zu der Normale der Niveaufläche von U und der des Elementes ds in derselben Beziehung stehen, wie vorher die gleich bezeichneten Grössen zu der Normale der Niveaufläche von V_ν und der von ds.

Der Ausdruck für T lässt ersehen, dass die Wirkung des influencirten Körpers sich auf eine durch seine Masse vertheilte und eine über seine Oberfläche ausgebreitete Ladung von magnetischer Flüssigkeit zurückführen lasse. Bezeichnen wir die cubische Dichtigkeit der ersten Ladung durch σ und die Flächendichtigkeit der zweiten Ladung durch ϱ, so hat man:

$$3.)\quad \varrho = -\frac{\cos\zeta}{pq}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}},\quad \sigma = \Delta_1^2\, U.$$

Die Gesammtquantität beider Ladungen ist gleich Null. Dies ergiebt sich aus der oben für das Integral $\int G\,\Delta^2 H\,dk$ aufgestellten Formel, wenn $G = 1$, $H = U$ gesetzt wird, erscheint aber auch von vornherein als nothwendige Folge der gemachten Prämissen. Man bemerke auch noch, dass das erste Integral in dem Ausdrucke für T, welches bei isotropen Mitteln verschwindet, für den ausserhalb des Krystalles befindlichen Raum als das Potential einer gewissen über die Oberfläche ausgebreiteten, aus entgegengesetzt gleichen Quanta bestehenden magnetischen Ladung angesehen werden kann.

Was endlich die Beziehung zwichen den Functionen U und V betrifft, so findet man:

$$4.)\quad V + \left(\frac{4\pi}{3\omega^2} - 1\right) U - \int \frac{\frac{\cos\zeta}{pq}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}}{r}\,ds + \int \frac{\Delta_1^2 U}{r}\,dk + C = 0.$$

Durch die Formeln 1., 2., 3. und 4. sind die Gesetze der magnetischen Induction in Krystallen vollständig bestimmt; sie gehen, wenn man $\alpha = \beta = \gamma$ setzt, in die entsprechenden Formeln für die Induction in isotropen Mitteln über. Wir wollen uns hier damit begnügen, einen Fall der in Rede stehenden Induction zu betrachten, der zu einfachen und eine Vergleichung mit vorliegenden Versuchen gestattenden Resultaten führt.

2. Verhalten einer krystallinischen Kugel im homogenen magnetischen Felde.

Eine krystallinische Vollkugel befinde sich in einem magnetischen Felde mit parallelen Kraftlinien und zwar seien die letzteren, wie wir zunächst der Einfachheit wegen annehmen wollen, mit einer Inductions-Axe parallel. Durch den Mittelpunkt der Kugel legen wir drei auf einander senkrechte in die Richtungen der Inductions-Axen fallende Coordinaten-Axen, von denen die der x mit der inducirenden Kraft parallel sei. Wenn nun, wie wir ferner annehmen wollen, die Grösse der inducirenden Kraft gleich Eins ist und ein beweglicher Nordpol von derselben in der Richtung von der positiven Hälfte der x-Axe nach der negativen hin getrieben wird, so ist das inducirende Potential:

$$V = x.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichung 4., indem wir zugleich versuchend für U die Form mx annehmen, so erhalten wir, unter $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Winkel zwischen den Coordinatenaxen und der auswärts gerichteten Normale des Elementes ds und unter α, β, γ wie früher die auf die x-, y- und z-Axe bezüglichen Constanten verstanden:

$$x + \left(\frac{4\pi}{3\omega^2} - 1\right) mx - \frac{m}{\alpha^2}\int \frac{\cos \mathfrak{a}}{r} ds + C = 0.$$

Da nun aber:

$$\int \frac{\cos \mathfrak{a}}{r} ds = \frac{4\pi}{3} x$$

ist, so wird in der That die Gleichung 4. durch die gemachte Annahme befriedigt, wenn man setzt:

$$m = \frac{1}{1 + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)},$$

oder:

$$U = \frac{x}{1 + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)}.$$

Hiernach verschwindet aber die durch die Masse des influencirten Körpers vertheilte fictive Ladung und es bleibt nur die über die Oberfläche ausgebreitete ideale Ladung übrig, für deren Dichtigkeit sich ergiebt:

$$\varrho = -\frac{\cos \mathfrak{a}}{\alpha^2\left\{1 + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)\right\}}.$$

Es ist leicht, die gewonnenen Resultate auf den allgemeinen Fall auszudehnen, wo die vertheilende Kraft eine beliebige Grösse und eine beliebige Richtung hat. Die Grösse der Kraft werde durch K bezeichnet, und die Richtung, nach welcher ein Südpol von der Kraft getrieben wird, bilde mit den Coordinatenaxen die Winkel λ, μ, ν. Es kommt alsdann:

$$U = K\left\{\frac{\cos\lambda . x}{1 + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)} + \frac{\cos\mu . y}{1 + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)} + \frac{\cos\nu . z}{1 + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)}\right\}.$$

Hieraus folgt ferner, wenn zur Abkürzung

$$\alpha^2\left\{1 + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)\right\} = \alpha_1^2,\ \beta^2\left\{1 + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)\right\} = \beta_1^2,$$

$$\gamma^2\left\{1 + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)\right\} = \gamma_1^2$$

gesetzt wird:

$$\varrho = -K\left\{\frac{\cos\lambda . \cos\mathfrak{a}}{\alpha_1^2} + \frac{\cos\mu . \cos\mathfrak{b}}{\beta_1^2} + \frac{\cos\nu . \cos\mathfrak{c}}{\gamma_1^2}\right\}.$$

Aus letzterem Ausdrucke lassen sich leicht die folgends zusammengestellten Beziehungen ableiten.

In der Hülfsfläche zweiten Grades, deren Axen $2\alpha_1$, $2\beta_1$, $2\gamma_1$ mit den Inductionsaxen parallel laufen, ziehe man den Radius q_1, der dieselbe Richtung, wie die vertheilende Kraft, hat. In dem Endpunkte jenes Radius lege man eine Berührungsebene und lasse auf sie vom Mittelpunkte das Perpendikel p_1 herab. Sodann verschiebe man in der Richtung dieses Perpendikels die

influencirte Kugel S in eine neue Lage S', so dass ihr Mittelpunkt, unter ε eine verschwindend kleine Grösse verstanden, den Weg

$$\frac{\varepsilon K}{p_1 q_1}$$

beschreibt. Die Kugel S werde endlich, wenn — wie wir hier unterstellen wollen — die drei Grössen α_1^2, β_1^2, γ_1^2 positiv sind, mit nördlichem magnetischen Fluidum von der cubischen Dichtigkeit $\frac{1}{\varepsilon}$ gefüllt und mit ebenso dichtem südlichen Fluidum werde die Kugel S' gefüllt. Alsdann sind diese beiden magnetischen Quanta mit der Ladung der influencirten Kugel äquivalent.

Die Wirkung, welche die magnetisch erregte Kugel von der inducirenden Kraft erleidet, lässt sich durch ein Gegenpaar darstellen. Die Ebene dieses Gegenpaares wird durch die beiden Linien p_1 und q_1 bestimmt. Sein Moment ist, unter S das Volumen der influencirten Kugel, und unter δ_1 den Winkel zwischen den Linien p_1 und q_1 verstanden, gleich:

$$SK^2 \cdot \frac{\sin \delta_1}{p_1 q_1}.$$

Zerlegt man das Gegenpaar nach den Coordinaten-Ebenen, so kommt für seine Componenten:

$$\Xi = SK^2\left(\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\gamma_1^2}\right) \cos\mu \cos\nu,$$

$$H = SK^2\left(\frac{1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\alpha_1^2}\right) \cos\nu \cos\lambda,$$

$$Z = SK^2\left(\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\beta_1^2}\right) \cos\lambda \cos\mu.$$

Die letzten Formeln, mit den analogen Formeln für die Magnetisirung eines isotropen Ellipsoides im homogenen magnetischen Felde verglichen, führen zu dem Resultate, dass die influencirte krystallinische Kugel sich ähnlich wie ein isotropes Ellipsoid verhält, dessen Axen in die Inductions-Axen der Kugel fallen und von solcher Grösse sind, dass die früher durch $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}^2$ bezeichneten Grössen mit den Constanten α_1^2, β_1^2, γ_1^2 proportional werden.

Für das magnetische Moment der inducirten krystallinischen Kugel findet man endlich:

$$M = \frac{SK}{p_1 q_1}.$$

Die magnetische Induction in krystallinischen Mitteln wurde zuerst von Plücker beobachtet und genauer untersucht. Ins Besondere hat derselbe die Uebereinstimmung in dem Verhalten eines im homogenen Felde inducirten Ellipsoides und dem einer krystallinischen Kugel durch den Versuch nachgewiesen. (On the magnetic induction of crystals. Philos. transactions 1858). Unter anderem stellte er Versuche mit einer Kugel an, welche aus einem Krystall von ameisensaurem Kupferoxyd hergestellt war, einem paramagnetischen Stoffe, dessen Krystallform dem monoklinischen Systeme angehört. Der Durchmesser der Kugel betrug 1 Centimeter. Als Inducent diente der bereits früher erwähnte Elektromagnet, auf dessen Polflächen zwei flache, nach einer Seite aber konisch zugespitzte Eisenstücke so aufgelegt wurden, dass ihre Spitzen einander zugekehrt und ungefähr 4 Centimeter von einander entfernt waren. Die Kugel wurde mittelst eines Coconfadens so aufgehängt, dass ihr Centrum mitten zwischen den beiden Polspitzen zu liegen kam. Annähernd durfte angenommen werden, dass die Kraftlinien innerhalb des von der Kugel eingenommenen Raumes unter einander und mit der Verbindungslinie der Polspitzen parallel waren. Zunächst wurde die Kugel so aufgehängt, dass die leicht erkennbare Spaltungsfläche horizontal lag. Es stellte sich alsdann die in krystallographischer und magnetischer Hinsicht symmetrische Ebene, welche auf der Spaltungsfläche senkrecht steht und folglich vertical war, senkrecht zur Verbindungslinie der Pole. Nachdem die durch diese Stellung bestimmte symmetrische Ebene auf der Kugel durch einen mit ihr parallelen grössten Kreis bezeichnet worden, wurde die Kugel so aufgehängt, dass dieser Kreis horizontal war, und der Durchmesser bezeichnet, welcher sich jetzt in die Verbindungslinie der Pole einstellte. Der letzte Durchmesser, welchen wir a nennen wollen, gab alsdann offenbar die Richtung der stärksten paramagnetischen Induction an, der auf der symmetrischen Ebene senkrechte Durchmesser b bestimmte die Richtung mittlerer Induction und ein auf den genannten senkrechter Durchmesser c war der Axe kleinster Induction parallel. Plücker

bestimmte hierauf die Dauer Δ_a, Δ_b, Δ_c der Oscillationen, welche die Kugel um ihre Gleichgewichtslage machte, als sie der Reihe nach mit den Durchmessern a, b, c senkrecht aufgehängt wurde und während der den Elektromagnet umkreisende Strom sich nur wenig änderte; er fand in einer von mehreren Versuchsreihen folgende Werthe:

$$\Delta_a = 2{,}666\,, \quad \Delta_b = 1{,}132\,, \quad \Delta_c = 1{,}224.$$

Um dies Ergebniss mit den theoretischen Formeln zu vergleichen, bezeichnen wir den Radius der Kugel durch R, die den Inductions-Axen a, b, c entsprechenden Inductions-Constanten bezüglich durch α_1, β_1, γ_1, da denn $\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1$ ist, und finden dem Früheren zufolge, indem wir von der Torsion und dem Trägheitsmomente der Aufhängungsvorrichtung absehen:

$$\frac{1}{\Delta_a^2} = \frac{G}{2R^2}\left(\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\gamma_1^2}\right), \quad \frac{1}{\Delta_b^2} = \frac{G}{2R^2}\left(\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\gamma_1^2}\right),$$

$$\frac{1}{\Delta_c^2} = \frac{G}{2R^2}\left(\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\beta_1^2}\right),$$

wo, unter s das specifische Gewicht der Kugel verstanden, zu setzen ist:

$$G = \frac{5K^2}{4\pi^2 s}.$$

Aus letzteren Formeln folgt aber:

$$\frac{1}{\Delta_a^2} + \frac{1}{\Delta_c^2} = \frac{1}{\Delta_b^2},$$

und in der That wird dieser Gleichung durch die beobachteten Werthe annähernd Genüge geleistet, indem man hat:

$$\frac{1}{\Delta_a^2} + \frac{1}{\Delta_c^2} = 0{,}1407 + 0{,}6675 = 0{,}8082, \quad \frac{1}{\Delta_b^2} = 0{,}7804.$$

Wir wollen ferner der Versuche gedenken, welche Plücker mit einer Kugel von Eisenvitriol, einer ebenfalls paramagnetischen und zum monoclinischen Systeme gehörigen Substanz, angestellt hat. Wie die Kugel aus ameisensaurem Kupferoxyd wurde dieselbe zwischen die Polspitzen aufgehängt und zwar zuerst so, dass die symmetrische Ebene horizontal, also eine Inductionsaxe senkrecht lag. Der Durchmesser a, welcher sich alsdann in die Verbindungslinie der Pole einstellte, wurde bezeichnet. Hierauf wurde die Kugel mit eben diesem Durchmesser senkrecht aufgehängt; in dieser Lage zeigte sie ein indiffe-

rentes Gleichgewicht. Der Durchmesser a war also die Axe der grössten Induction und nach den auf jenem senkrechten Richtungen war die Induction ein und dieselbe und zwar ein Minimum. Als die Kugel nach einem auf a senkrechten Durchmesser b aufgehängt wurde, ergab sich im Mittel für die Dauer einer Oscillation;

$$\varDelta_b = 2{,}25.$$

Für dieselbe Grösse der vertheilenden Kraft ergab sich aber, als der Durchmesser a mit dem Aufhängungsfaden oder der Drehaxe einen Winkel von 45^0 bildete, die Oscillationsdauer:

$$\varDelta_d = 3{,}14.$$

Um die theoretischen Formeln dem beschriebenen Versuche anzupassen, ist, unter α_1 und β_1 die Inductions-Constanten verstanden, die den Durchmessern a und b entsprechen, zu setzen:

$$\alpha_1 < \beta_1, \quad \beta_1 = \gamma_1.$$

Man erhält dann ferner für die Dauer der Oscillationen, welche der Aufhängung nach b und nach dem unter einem Winkel φ geneigten Durchmesser d entsprechen:

$$\frac{1}{\varDelta_b^2} = \frac{G}{2R^2}\left(\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\beta_1^2}\right), \quad \frac{1}{\varDelta_d^2} = \frac{G}{2R^2}\left(\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\beta_1^2}\right) sin\,\varphi^2,$$

wo G und R dieselbe Bedeutung wie oben haben. Es folgt hieraus:

$$\varDelta_b = \varDelta_d\, sin\,\varphi,$$

welche Gleichung in der That durch die Ergebnisse des Versuches nahe befriedigt wird, indem man hat:

$$\varDelta_b = 2{,}25, \quad \varDelta_d\, sin\,\varphi = 2{,}22.$$

Litteratur. W. Thomson. On the theory of magnetic induction in crystalline and non-crystalline substances. Philos. Magaz 4. ser. Vol. I.

VIII.

ERWEITERUNG DER THEORIE DER MAGNETISCHEN INDUCTION.

Die auf die Annahme magnetischer Fluida und deren unbegrenzte Entwickelbarkeit gegründete Theorie der magnetischen Induction, welche wir im Vorhergehenden kennen gelernt haben, führt zu dem Resultate, dass das magnetische Moment eines erregten Körpers unter übrigens gleichen Umständen mit dem Werthe proportional ist, welchen das Potential oder die Kraft des Inducenten in einem und demselben, übrigens aber beliebigen Punkte seines magnetischen Feldes aufweist. Es steht dies aber keineswegs im Einklang mit der Wirklichkeit, wie zuerst aus Versuchen von Joule (Account of experiments demonstrating a limit of magnetizability of iron. Philos. Magaz. 4. ser. Vol. II.) und Müller (Bericht über die neuesten Fortschritte der Physik. 1849), sowie durch die Untersuchungen von Weber (Elektrodynamische Maassbestimmungen, ins Besondere über den Diamagnetismus. Abhandl. der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. I.) und Plücker (Ueber das Gesetz der Induction bei paramagnetischen und diamagnetischen Substanzen. Poggend. Ann. XCI.) erkannt wurde. Das Moment des inducirten Magnetismus nähert sich vielmehr einer von der Natur des betreffenden Körpers abhängigen Grenze, wenn die vertheilenden Kräfte immer grösser und grösser werden.

Die Annahme der unbegrenzten Entwickelbarkeit der magnetischen Fluida muss dem Obigen zufolge aufgegeben werden, wenn auch die Annahme der letzteren immerhin noch als eine

Hülfsvorstellung festgehalten werden darf, und die Theorie der magnetischen Induction erheischt eine erweiternde Modification, wodurch sie in den Stand gesetzt wird, die oben erwähnte Thatsache zu umfassen. Diese Erweiterung scheint schon lediglich durch eine allgemeinere Annahme über das magnetische Moment gewonnen zu werden, welches durch eine vertheilende Kraft in einem einzelnen Molecüle erregt wird, oder in einem Körperelemente, wenn eine gegenseitige Einwirkung der Molecüle nicht stattfindet. Wir nehmen also an, dass das magnetische Moment, welches durch einen Inducenten mit dem Potentiale V in dem Elemente dk eines festen isotropen Körpers erregt wird, wenn eine gegenseitige Einwirkung der Molecüle nicht stattfindet, durch den Ausdruck $-F\left(\frac{dV}{dN}\right)\cdot dk$, in welchem $F\left(\frac{dV}{dN}\right)$ eine Function der Kraft $\frac{dV}{dN}$ bedeutet, dargestellt werde und dass hierbei die magnetische Axe mit der genannten Kraft parallel werde. Ueber die Function F machen wir ferner die Annahme, dass sie ihr Vorzeichen ändert, wenn ihr Argument sein Vorzeichen ändert, dass ihr absoluter Werth wächst, wenn der ihres Argumentes zunimmt, dass aber jener sich einer constanten Grenze nähert, wenn dieser über alle Grenzen hinaus wächst. Für das Potential des im Elemente unter den angegebenen Umständen erregten Magnetismus erhalten wir jetzt mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen:

$$-F\left(\frac{dV}{dN}\right)\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN}\cos\delta\,dk.$$

Die Bedingungen für das magnetische Gleichgewicht ergeben sich auf demselben Wege, welcher im vierten Capitel eingeschlagen wurde. Es sei wiederum U dasjenige Potential, welches in dem einzelnen Elemente des influencirten Körpers, wenn eine gegenseitige Einwirkung der Molecüle nicht stattfindet, denselben magnetischen Zustand hervorrufen würde, wie er, nachdem magnetisches Gleichgewicht eingetreten, wirklich vorhanden ist. Alsdann kann die Kraft, welche seitens des im Körper inducirten Magnetismus auf das einzelne Molecül einwirkt — von dem

Magnetismus des Molecüles selbst abgesehen — angesehen werden als die Resultante der Kraft des Potentiales:

$$-\int F\left(\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\right)\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}}\cos\delta\, dk$$

und der Kraft:

$$\frac{4\pi}{3}F\left(\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\right),$$

welche letztere dieselbe Richtung, wie die der Potentialfunction U entsprechende Kraft, hat.

Die Bedingung für das Gleichgewicht des Magnetismus besteht nun endlich darin, dass die Resultante aus der Kraft des Inducenten und der soeben näher bestimmten Kraft, welche von dem ausserhalb eines Molecüles im magnetisirten Körper auftretenden Magnetismus herrührt, der Kraft des Potentiales U in der ganzen Ausdehnung des Körpers gleichkommen muss. Sobald es gelungen ist, die Function U zu bestimmen, für welche jener Bedingung genügt wird, ist auch hiermit der magnetische Zustand des influencirten Körpers bestimmt. Ins Besondere ergiebt sich für das Potential des inducirten Magnetismus:

$$T = -\int F\left(\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\right)\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}}\cos\delta\, dk.$$

Wenn der absolute Werth der fictiven Kraft $\frac{dU}{d\mathfrak{N}}$ in der ganzen Ausdehnung des influencirten Körpers kleiner und kleiner wird, so nähert sich offenbar der Quotient $F\left(\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\right):\frac{dU}{d\mathfrak{N}}$ in allen Punkten des Körpers einem und demselben Grenzwerthe. Jenes tritt aber im Allgemeinen ein, wenn die vertheilende Kraft des Inducenten kleiner und kleiner wird. Aus diesem Grunde wird es gestattet sein, im Allgemeinen bei schwächeren Kräften und in erster Annäherung für die Function F die Form $\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{d\mathfrak{N}}$ anzunehmen — unter α eine Constante verstanden — oder in anderen Worten, die früher entwickelte Theorie der magnetischen Induction als eine erste Annäherung gelten zu lassen. Solches bestätigt auch, wie schon aus einem Theile der früher bespro-

chenen Versuche erhellt, die Erfahrung, und es wird daher jene Theorie für viele Fälle einen besondern Werth behalten.

Wenn der absolute Werth der vertheilenden Kraft in der ganzen Ausdehnung des magnetisirten Körpers über alle Grenzen hinaus wächst, so nähert sich der Werth des Quotienten $\frac{dU}{d\mathfrak{N}} : \frac{dV}{dN}$ der Einheit. Zugleich nähert sich das absolute magnetische Moment eines Elementes dk dem absoluten Werthe von $F(\infty)\,dk$ und seine magnetische Axe bezüglich der Richtung der vertheilenden Kraft oder der gerade entgegengesetzten Richtung. Endlich nähert sich das Potential des inducirten Magnetismus, wenn δ den Winkel zwischen r und der vertheilenden Kraft an der Stelle des einzelnen Elementes bedeutet, dem Grenzwerthe:

$$F(\infty)\int\frac{\cos\delta}{r^2}\,dk.$$

Wir wollen hier die erweiterte Theorie der magnetischen Induction auf ein Ellipsoid anwenden, welches durch eine mit einer seiner Axen parallele Kraft magnetisirt wird. Der Anfangspunkt der Coordinaten werde in den Mittelpunkt des Ellipsoides gelegt und die x-Axe in die Axe, mit welcher die vertheilende Kraft parallel ist. Die Länge dieser Axe sei $2a$, die vertheilende Kraft K und diese so gerichtet, dass:

$$V = Kx.$$

Machen wir die Annahme:

$$U = mx,$$

so besteht die Kraft, welche auf ein einzelnes Molecül seitens des in allen übrigen Molecülen enthaltenen Magnetismus einwirkt, aus den Kräften der Potentiale:

$$-\int F(-m)\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}}\cos\delta\,dk,\quad -\frac{4\pi}{3}\cdot F(-m)\,x.$$

Da aber $F(-m) = -F(m)$ ist, und da man mit Beibehaltung der früher bei Betrachtung der Induction in einem Ellipsoide gebrauchten Bezeichnung für die im Innern des Ellipsoides gelegenen Punkte

$$\int\frac{\cos\delta}{r^2}\,dk = \frac{A}{a}\cdot x$$

hat, so kann man für die beiden letzten Potentialfunctionen schreiben:

$$-\frac{A}{a}\cdot F(m)x,\quad \frac{4\pi}{3}\cdot F(m)\,x.$$

Wenn nun die über U gemachte Annahme zulässig sein soll, so muss im Hinblick auf die für das Gleichgewicht aufgestellte Bedingung in der ganzen Ausdehnung des Ellipsoides sein:

$$Kx - \frac{A}{a}\cdot F(m)x + \frac{4\pi}{3}\cdot F(m)x = mx + const.$$

In der That wird aber diese Gleichung befriedigt, wenn man setzt:

$$m = K + \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{A}{a}\right)\cdot F(m).$$

Wie in der früheren Theorie ergiebt sich also auch jetzt, dass das Ellipsoid gleichförmig magnetisirt ist. Für das Potential des inducirten Magnetismus erhält man aber nunmehr:

$$T = -\,F(m)\int\frac{\cos\delta}{r^2}\,dk,$$

und hieraus folgt für das magnetische Moment, unter E das Volumen des Ellipsoides verstanden:

$$M = E\,.\,F(m).$$

Die obigen Betrachtungen lassen sich leicht auf den Fall ausdehnen, wo die Richtung der vertheilenden Kraft nicht mit einer Axe des Ellipsoides parallel, sondern eine ganz beliebige ist.

Mittelst der für die Grössen m und M aufgestellten Formeln kann man aus zu einander gehörigen Werthen von K und M zu einander gehörige Werthe der Function F und ihres Argumentes ableiten. Bei einer Kugel mit dem Volumen S würde man ohne Weiteres finden:

$$m = K,\quad F(m) = \frac{M}{S}\cdot$$

Für ein Rotations-Ellipsoid aber, welches durch eine mit seiner Rotations-Axe parallele Kraft magnetisirt wird, hat man:

$$m = K + \left(\frac{1}{3} - s\right)\cdot\frac{4\pi M}{E},\quad F(m) = \frac{M}{E},$$

wo, unter σ den reciproken Werth der numerischen Excentricität verstanden, zu setzen ist:

$$s = \sigma(\sigma^2 - 1)\left\{\frac{1}{2} log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - \frac{1}{\sigma}\right\}.$$

Unter den vorliegenden Versuchen gestattet eine Reihe der von Weber a. a. O. mitgetheilten Beobachtungen die Anwendung obiger Formeln. Derselbe bestimmte auf dem im Capitel über den Diamagnetismus angedeuteten Wege die magnetischen Momente, welche in einem cylindrischen Eisenstabe von 10,02 Centimeter Länge, 0,36 Centimeter Dicke und 8,19 Gramm Gewicht durch verschiedene mit der Axe parallele Scheidungskräfte hervorgerufen wurden. Unter anderen erhielt Weber folgende zu einander gehörige Werthe der vertheilenden Kraft K und des inducirten Magnetismus, ausgedrückt durch die von uns gewählten Einheiten.

K	M
65,9	746,2
155,1	1219,4
264,6	1398,8
318,6	1464,1

Substituirt man nun an die Stelle der cylindrischen Form des Eisenstabes die eines gestreckten Rotations-Ellipsoides von gleichem Inhalt, dessen Rotations-Axe sich zum Aequator-Radius verhält, wie die Länge l des Stabes zu seiner Dicke d, so wird:

$$s = 3905 \,.\, 10^{-6}.$$

Hiernach und da sich für die Grösse $d^2 l$ aus dem absoluten und specifischen Gewichte des Stabes der Werth 1,3403 berechnet, ergeben sich folgende zu einander gehörige Werthe der Function F und ihres Argumentes m.

m	$F(m)$
3000,4	708,8
4950,5	1158,4
5765,5	1328,8
6076,3	1390,8

Nach der Hypothese der unbegrenzten Entwickelbarkeit der magnetischen Fluida ist der Quotient $m : F(m)$ für einen und denselben Körper constant und zwar nach der von uns gebrauchten Bezeichnung gleich α^2, oder $4\pi(3 - 2\varkappa) : 3\varkappa$, also beim Eisen, wenn wir für $\varkappa$ den Werth 0,9977 annehmen — den grössten, welcher uns bei Versuchen mit kleineren Scheidungskräften entgegentrat — gleich 4,22. In Wirklichkeit aber steigt jener Quotient für die oben gefundenen Werthe des Argumentes von 4,23 bis 4,37. Wir schliessen hieraus im Hinblick auf die theoretischen Formeln, dass das magnetische Moment, welches in einer Kugel aus Eisen durch eine von Null ausgehende und wachsende Scheidungskraft inducirt wird, selbst bis zu einem sehr beträchtlichen Werthe der letzteren mit dieser proportional bleibt, während sich bei einem gestreckten Ellipsoide eine um so bedeutendere Abweichung von der Proportionalität offenbart, je grösser seine Excentricität ist. Dies Ergebniss steht insofern mit der Erfahrung im Einklang, als aus den oben citirten Versuchen von Müller geschlossen werden muss, dass das magnetische Moment, welches in einem cylindrischen Eisenstabe durch eine mit seiner Axe parallele Kraft erzeugt wird, mit zunehmender Kraft um so rascher sich seinem Maximumswerthe nähert, je dünner bei gleichbleibender Länge der Stab ist.

Indem wir den Leser wegen weiterer theoretischer Betrachtungen, die mehr oder weniger direct auf eine Ermittelung der Function F hinzielen, auf die oben erwähnten Abhandlungen von Plücker und Weber verweisen, heben wir noch hervor, dass sich der Zusammenhang zwischen der von uns durch F bezeichneten Function und der von Kirchhoff in der folgends citirten Abhandlung bei Erweiterung der Poisson'schen Inductionstheorie eingeführten und gleichbezeichneten Function wie folgt darstellt, wenn wir hier die letztere durch Φ und ihr Argument durch u bezeichnen:

$$u = m - \frac{4\pi}{3} F(m), \quad u\,\Phi(u) = F(m).$$

Litteratur. Kirchhoff. Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen. Crelle's Journal f. reine und angew. Mathem. Band XLVIII.

IX.

VON DER COERCITIVKRAFT.

Viele Körper kehren, wenn sie der Wirkung einer vertheilenden Kraft ausgesetzt und hierauf derselben wieder entzogen werden, in ihren ursprünglichen neutralen Zustand nicht mehr zurück, sie behalten vielmehr eine gewisse magnetische Ladung, mit welcher sie im Stande sind, die Rolle permanenter Magnete zu spielen. Zu jenen Körpern, die sich in Bezug auf den Magnetismus analog wie die Halbleiter oder unvollkommenen Isolatoren in Bezug auf die statische Elektricität verhalten, gehört der gehärtete Stahl, welcher die erwähnte Eigenschaft in besonders auffälliger Weise offenbart, und sich daher auch zur Herstellung permanenter Magnete besonders eignet.

Man erklärt das Verhalten der gedachten Körper durch die Annahme, dass sie einer jeden vertheilenden Kraft eine Widerstands- oder Coercitivkraft entgegensetzen, die übrigens nur bis zu einem gewissen von der Natur des betreffenden Körpers abhängigen Grenzwerthe ansteigen kann. Um bei dieser Annahme die Bedingungen für das magnetische Gleichgewicht eines Körpers der fraglichen Art, welcher der Wirkung eines Inducenten ausgesetzt wird, zu gewinnen, mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden. Es seien X, Y, Z die mit den Axen eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems parallelen Componenten der vertheilenden Kraft, X', Y', Z' die Componenten der Kraft, mit welcher der im Körper enthaltene Magnetismus auf

das einzelne Molecül einwirkt. Ferner sei U die Potentialfunction, welche in dem einzelnen Körperelemente, wenn keine Coercitivkraft vorhanden wäre, und eine gegenseitige Einwirkung der Molecüle nicht stattfände, denselben magnetischen Zustand hervorrufen würde, wie er wirklich stattfindet. Die dem Potentiale entsprechende Kraft liefere nach den Coordinaten-Axen die Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. Endlich seien ξ, η, ζ die Componenten der Widerstandskraft und das Maximum der letzteren werde durch τ bezeichnet. Für den Fall des Gleichgewichtes müssen alsdann folgende Gleichungen bestehen:

$$X + X' + \xi = \mathfrak{X}, \quad Y + Y' + \eta = \mathfrak{Y}, \quad Z + Z' + \zeta = \mathfrak{Z};$$

überdies muss sein:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqq \tau^2.$$

Man bemerke noch, dass sich die Componenten X, Y, Z durch das Potential des Inducenten, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ durch das Potential U bestimmen. Die Componenten X', Y', Z' aber sind die der Kraft, welche resultirt aus der Kraft des Potentiales:

$$-\int F\left(\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\right) \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\mathrm{N}} \cos\delta\, dk$$

und der Kraft:

$$\frac{4\pi}{3} \cdot F\left(\frac{dU}{d\mathfrak{N}}\right).$$

Die obigen Gleichungen gehen, wenn ξ, η, ζ verschwinden, in diejenigen über, welche für das magnetische Gleichgewicht der Körper ohne Coercitivkraft gelten, nämlich in folgende: $X + X' = \mathfrak{X}$, $Y + Y' = \mathfrak{Y}$, $Z + Z' = \mathfrak{Z}$. Lassen wir aber die vertheilende Kraft verschwinden, so kommt für das Gleichgewicht des in einem permanenten Magneten enthaltenen Magnetismus:

$$X' + \xi = \mathfrak{X}, \quad Y' + \eta = \mathfrak{Y}, \quad Z' + \zeta = \mathfrak{Z}.$$

Aus letzteren Gleichungen ersehen wir, dass jede Magnetisirung, wie sie in einem Körper ohne Coercitivkraft durch einen Inducenten erzeugt wird, für den Fall, dass dem Körper Coercitivkraft beigelegt wird, permanent werden kann, wofern nur in keinem Punkte des Körpers die vertheilende Kraft grösser als τ ist. Die letzten Gleichungen gehen nämlich, wenn man für ξ, η, ζ bezüglich X, Y, Z einsetzt, in die für das magnetische Gleichgewicht eines Körpers ohne Coercitivkraft über.

Es darf aber aus der gemachten Bemerkung keineswegs der Schluss gezogen werden, dass die magnetische Ladung, welche in einem ursprünglich neutralen Körper durch einen Inducenten hervorgerufen wird, nach Erlöschen der vertheilenden Kraft als permanente Ladung zurückbleibe, wofern nur jene Kraft in der ganzen Ausdehnung des Körpers das Maximum der Coercitivkraft nicht übertreffe. In der That involviren die aufgestellten Gleichungen keine bestimmte Annahme über eine Beziehung zwischen den Kräften ξ, η, ζ und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. Uebrigens lehrt die Erfahrung, dass das Moment des permanenten Magnetismus, welcher z. B. in einem cylindrischen Stabe aus gehärtetem Stahl durch eine mit der Axe parallele Scheidungskraft hervorgerufen wird, stets nur einen Bruchtheil des Momentes des temporären Magnetismus ausmacht, der sich während der Wirkung der genannten Kraft offenbart. Das Verhältniss zwischen dem temporären und permanenten Moment ist von der Grösse der vertheilenden Kraft abhängig. Als Beleg hierfür erwähnen wir die Versuche, welche Wiedemann (Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. 1861.) über die Abhängigkeit zwischen den genannten Momenten und der magnetisirenden Kraft angestellt hat.

Wenn ein mit Coercitivkraft versehener, ursprünglich neutraler Körper in einem homogenen magnetischen Felde erregt wird, und wenn hierauf die vertheilende Kraft erlischt, so findet nach Obigem stets eine theilweise Wiedervereinigung der getrennten Magnetismen statt. Die Kraft, womit die beiden Magnetismen sich zu vereinigen streben, hat unmittelbar nach dem Erlöschen der vertheilenden Kraft die Componenten $-\mathfrak{X}$ u. s. f. oder $-(X + X' + \xi)$ u. s. f. Sie ist im Allgemeinen von einem Punkte des Körpers zum andern in Grösse und Richtung verschieden. Wenn aber die vertheilende Kraft grösser und grösser wird, so nähert sich jene Kraft einer Grenze und ihre Richtung nähert sich der der vertheilenden Kraft entgegengesetzten Richtung. Hiernach steht zu erwarten, dass nach vorhergegangener Erregung durch eine sehr grosse Kraft ein permanenter Zustand auftrete, wobei die Widerstandskraft, welche sich der vollständigen Wiedervereinigung der getrennten Magnetismen entgegensetzt, in allen Theilen des Körpers gleich gross

nämlich gleich dem Maximum τ der Coercitivkraft, und mit der ursprünglich thätigen Scheidungskraft gleichgerichtet sei. Die Magnetisirung ist dann nahe dieselbe, wie wenn der Körper keine Coercitivkraft besässe und durch eine der Scheidungskraft parallele Kraft τ influencirt würde. Durch die Erfahrung wissen wir auch, dass das permanente Moment, welches z. B. in einem cylindrischen Stabe aus gehärtetem Stahl durch eine mit der Axe parallele Scheidungskraft erzeugt wird, schliesslich einen Grenzwerth erreicht, wenn jene Kraft zunimmt, und durch weitere Zunahme der letzteren nicht mehr vergrössert wird.

Man sagt alsdann bekanntlich von dem Stabe, dass er bis zur Sättigung (permanent) magnetisirt sei. Dass aber die Art der Magnetisirung eines solchen Stabes wenigstens annähernd die oben näher bezeichnete sei, darf aus dem geschlossen werden, was früher über die Vertheilung des Magnetismus in einem cylindrischen Stabe ohne Coercitivkraft gesagt wurde.

Es möge hier noch die Bemerkung Platz finden, dass das Moment eines permanenten Stahlmagneten im Verlaufe der Zeit einen Verlust erleidet, schliesslich aber merklich constant bleibt. Nach Hansteen's Untersuchungen (Lamont, Magnetismus der Erde. Dove's Repertorium der Physik. Band VII.) lässt sich das Moment als Function der Zeit durch die Formel:

$$A + B e^{-kt}$$

darstellen, wo A, B, k drei von dem Magneten abhängige Constanten sind, t die Zeit und e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Bevor wir unsere Betrachtungen über die magnetischen Erscheinungen beschliessen, müssen wir noch des Einflusses gedenken, welchen die Temperatur auf dieselben äussert. Von den über diesen Gegenstand vorliegenden Beobachtungen, die zum Theil schwer miteinander zu vereinbaren sein dürften, wollen wir uns hier begnügen nur einige wenige mitzutheilen. Plücker (Ueber das Gesetz, nach welchem der Magnetismus und Diamagnetismus von der Temperatur abhängig ist. Pogg. Ann. LXXV.) fand, dass die anziehende Kraft, welche ein inducirender Magnet auf ein Stück dünnes Eisenblech ausübte, von $96{,}095^{gr}$ bis zu $104{,}125^{gr}$ anwuchs, während unter übrigens gleichbleibenden Umständen die Temperatur des Eisenbleches von

330^0 bis 39^0 abnahm. Die Anziehung, welche eine Schicht von pulverisirtem Nickel erlitt, stieg von $2{,}5^{gr}$ auf 71^{gr}, während die Temperatur von $331^0{,}56$ bis $32^0{,}5$ sank. Die Abstossung, welche eine Masse Wismuth erlitt, nahm von $0{,}055^{gr}$ bis $0{,}995^{gr}$ zu, während sich das ursprünglich geschmolzene Wismuth von $311^0{,}56$ bis $148^0{,}75$ abkühlte.

Auch der permanente Magnetismus wird bekanntlich von der Temperatur beeinflusst. Das magnetische Moment eines Stahlmagneten nimmt unter anderen nach Lamont (Magnetismus der Erde. Dove's Repertorium der Physik. Band VII.) bei der Erwärmung an Grösse ab; es wächst wiederum bei der Abkühlung, ohne jedoch im Allgemeinen seinen ganzen ursprünglichen Werth wieder zu erlangen, wenn die Temperatur dieselbe wie am Anfange wird. Diese Angabe bezieht sich auf Temperaturen innerhalb des Fundamentalabstandes. Für die gewöhnlichen Schwankungen der Temperatur ist es gestattet, die geringen Aenderungen des magnetischen Momentes mit den Aenderungen der Temperatur proportional zu setzen, hierbei unterstellt, dass der magnetische Zustand bei constanter Temperatur ebenfalls merklich constant sei; letzteres tritt aber erst ein, nachdem eine kürzere oder längere Zeit seit dem Magnetisiren verstrichen ist.

Es möge endlich noch ausdrücklich erwähnt werden, dass der Einfluss der Temperatur bei den früher erörterten Versuchen, die sich auf gewöhnliche Temperaturen beziehen, nicht berücksichtigt zu werden braucht.

ELEKTRODYNAMIK.

I.

VON DER WECHSELWIRKUNG ELEKTRISCHER STRÖME.

1. Ableitung der Ampère'schen Formel für die Wechselwirkung zweier Stromelemente aus der Weber'schen Fundamental-Formel für die Wechselwirkung elektrischer Massen.

Die Kraft, mit der eine ruhende elektrische Masse auf eine zweite ebenfalls ruhende elektrische Masse einwirkt, liefert nach den Axen eines rechtwinkligen Raum-Coordinatensystemes Componenten, welche sich als partielle Differentialquotienten des Potentiales der gedachten Massen in Bezug auf einander nach den Coordinaten der einen oder der anderen Masse darstellen lassen. Bezeichnen wir die Massen durch q, q', ihre Entfernung durch r, ihre Coordinaten durch x, y, z und x', y', z', so hat man für die Componenten der Kraft, mit welcher die Masse q' auf die Masse q einwirkt:

$$X = -\frac{d\left(\frac{qq'}{r}\right)}{dx},\ Y = -\frac{d\left(\frac{qq'}{r}\right)}{dy},\ Z = -\frac{d\left(\frac{qq'}{r}\right)}{dz},$$

wo zu setzen ist:

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Die obigen Formeln gelten nicht mehr, sobald eine der Massen oder die eine und die andere Masse sich in Bewegung be-

findet. Es scheint vielmehr zur Erklärung der elektrodynamischen Phänomene, der Erscheinungen, welche bei der bewegten Elektricität auftreten, an die Stelle des Potentiales $\frac{qq'}{r}$ der einen Masse in Bezug auf die andere der folgende Ausdruck in die oben aufgeführten Formeln eingesetzt werden zu müssen:

$$\frac{qq'}{r}(1 - \lambda^2 \mathfrak{v}^2) = u,$$

in welchem Ausdrucke $\mathfrak{v}$ die relative Geschwindigkeit der elektrischen Massen in der Richtung ihrer Verbindungslinie und λ eine Constante bedeutet. Die Grösse $\mathfrak{v}$ rechnen wir positiv, wenn sich beide Massen von einander entfernen, und alsdann ist, unter t die Zeit verstanden:

$$\mathfrak{v} = \frac{dr}{dt}.$$

Durch die angegebene Erweiterung finden wir:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{du}{dx} \\ &= \left(\frac{qq'}{r^2} + \lambda^2 qq' \frac{d\left(\frac{\mathfrak{v}^2}{r}\right)}{dr}\right)\frac{dr}{dx} \\ &= \left(\frac{qq'}{r^2} + \lambda^2 qq' \left[\frac{2\mathfrak{v}}{r} \cdot \frac{d\mathfrak{v}}{dr} - \frac{\mathfrak{v}^2}{r^2}\right]\right)\frac{dr}{dx} \\ &= \left(\frac{qq'}{r^2} + \lambda^2 qq' \left[\frac{2}{r} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]\right)\frac{dr}{dx}. \end{aligned}$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für die beiden übrigen Componenten Y und Z.

Die Einwirkung, welche die Masse q seitens der Masse q' erleidet, stellt sich also auch hier durch eine Kraft dar, welche in die Verbindungslinie der Massen fällt; für ihre Grösse aber hat man:

$$\frac{qq'}{r^2} + \lambda^2 qq' \left[\frac{2}{r} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Es ist dies die Fundamentalformel, welche Weber für die Wechselwirkung elektrischer Massen aufgestellt hat; sie schliesst als besonderen Fall das Gesetz für die Wechselwirkung ruhender Massen in sich ein.

Ehe wir die obigen Ausdrücke in Anwendung bringen, wol-

len wir denselben eine andere, für die Folge bequemere Form geben. Wir bezeichnen durch v, v' die Geschwindigkeiten der elektrischen Massen, durch α, β, γ und α', β', γ' die Winkel, welche die Richtungen der Geschwindigkeiten mit den Axen der x, y, z bilden. Ferner seien a, b, c die Winkel, welche die Linie r, solche in der Richtung von q' nach q hin genommen, mit den Axen bildet. Die Winkel zwischen den Richtungen von v, v' und der von r seien δ, δ', und θ sei der Winkel zwischen den beiden Richtungen der Geschwindigkeiten. Endlich mögen die beschleunigenden Kräfte, wie sie sich aus der Bewegung der Massen ergeben, d. h. die Kräfte, deren Componenten durch die zweiten Derivationen der Coordinaten nach der Zeit dargestellt werden, durch N und N', sowie die Winkel, die sie mit der Richtung von r bilden, durch ν und ν' bezeichnet werden. Man hat alsdann:

$$r\frac{dr}{dt} = (x-x')\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right) + (y-y')\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right)$$
$$+ (z-z')\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right)$$
$$= r\,(v\cos\delta - v'\cos\delta'),$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right)^2$$
$$+ (x-x')\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) + (y-y')\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y'}{dt^2}\right)$$
$$+ (z-z')\left(\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2z'}{dt^2}\right)$$
$$= v^2 + v'^2 - 2vv'\cos\theta + r\,(N\cos\nu - N'\cos\nu').$$

Durch Substitution obiger Ausdrücke findet man:

$$X = \lambda^2 q q' \frac{\cos a}{r^2}\left\{\frac{1}{\lambda^2} + 2\,(v^2 + v'^2 - 2vv'\cos\theta)\right.$$
$$\left. - 3\,(v\cos\delta - v'\cos\delta')^2 + 2r\,(N\cos\nu - N'\cos\nu')\right\}.$$

Die Ausdrücke für die beiden übrigen Componenten Y, Z werden aus dem Obigen erhalten, wenn man an die Stelle von a bezüglich b oder c treten lässt.

Wir wenden uns jetzt zur Herleitung der Formel, welche

Ampère, auf die Ergebnisse mannigfacher Versuche gestützt, zur Erklärung der Wechselwirkung zwischen linearen elektrischen Strömen aufgestellt hat. Unter einer linearen elektrischen Strömung verstehen wir aber die Bewegung elektrischer Massen in einem linienförmigen Leiter nach der Längenrichtung des letzteren. Wir werden in der Folge nur constante elektrische Ströme betrachten, d. h. solche, bei welchen durch jeden Querschnitt während einer gegebenen Zeit gleiche Mengen positiver oder negativer Elektricität in gleicher Richtung hindurchfliessen, so dass nirgends weder eine Ansammlung, noch eine Abnahme der Elektricität eintreten kann. Zur Vereinfachung der Betrachtungen adoptiren wir die Vorstellung, dass durch jeden Querschnitt eines Stromes fortwährend entgegengesetzt gleiche Mengen Elektricität nach entgegengesetzten Richtungen hindurchfliessen und dass folglich gleichzeitig zwei nach entgegengesetzten Richtungen vor sich gehende, gleich starke Strömungen, eine Strömung positiver und eine Strömung negativer Elektricität, oder, wie wir kürzehalber sagen wollen, eine positive und eine negative Strömung, auftreten. Auch unterstellen wir, dass die Geschwindigkeit der Strömung für den einzelnen Strom sowohl in Bezug auf den Ort, als auch in Bezug auf die Zeit constant sei. Unter der Richtung eines Stromes werden wir die der positiven Strömung und unter Stromquantum das Quantum positiver Elektricität verstehen, welches während der Zeiteinheit durch den Querschnitt hindurchfliesst.

Wie wir in der Folge sehen werden, treten bei einem Leiter, welcher von einem constanten elektrischen Strome durchflossen wird, neben der in Bewegung begriffenen Elektricität auch noch relativ ruhende elektrische Massen auf, welche über die Oberfläche des Leiters verbreitet sind. Die Wirkungen dieser Massen heben aber theils bei den zunächst zu betrachtenden Phänomenen einander auf, theils sind dieselben gegen die Wechselwirkungen zwischen den fliessenden elektrischen Massen zu vernachlässigen. Es kommen daher nur die letzten Wirkungen in Betracht, und diese treten dadurch, dass sie sich auf die ponderable Materie der Stromträger übertragen, in die Erscheinung. Da die Kräfte, welche zwei elektrische Quanta aufeinander ausüben, stets entgegengesetzt gleich sind, so heben

sich auch die Kräfte, welche zwischen den Theilen eines und desselben Stromes thätig sind, unter einander auf, wenn, wie wir im Allgemeinen annehmen werden, die Stromträger unbiegsam sind.

Es seien nun ds und ds' zwei Stromelemente, durch deren Querschnitte während der Zeiteinheit die Quanta J und J' positiver Elektricität mit den Geschwindigkeiten v und v' hindurchfliessen. Alsdann leuchtet ein, dass fortwährend in dem ersten Elemente die elektrischen Quanta:

$$+\frac{J}{v}\,ds \text{ und } -\frac{J}{v}\,ds,$$

und in dem zweiten Elemente die Quanta:

$$+\frac{J'}{v'}\,ds' \text{ und } -\frac{J'}{v'}\,ds'$$

vorhanden sind. Ferner bemerke man, dass, weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektricität in jedem der beiden Ströme als constant unterstellt wird, die Kräfte N und N' senkrecht auf die Stromcurven zu stehen kommen, und dass dieselben sich daher wie folgt ausdrücken, wenn R und R' die Krümmungsradien jener Curven an der Stelle der Elemente bedeuten:

$$N=\frac{v^2}{R},\ N'=\frac{v'^2}{R'}.$$

Hiernach ergiebt sich dem Früheren zufolge für die X-Componente der Kraft, welche das in ds' enthaltene positive Quantum auf das gleichnamige Quantum in ds ausübt:

$$\frac{\lambda^2 J J'\,ds\,ds'}{vv'}\cdot\frac{\cos a}{r^2}\left\{\frac{1}{\lambda^2}+2(v^2+v'^2-2vv'\cos\theta)-3(v\cos\delta-v'\cos\delta')^2\right.$$
$$\left.+\,2r\left(\frac{v^2}{R}\cos\nu-\frac{v'^2}{R'}\cos\nu'\right)\right\},$$

wo sich also die Grössen θ, δ und δ' auf die Richtungen beziehen, nach welchen sich die positiven Massen oder die positiven Ströme bewegen. Bezeichnen wir den obigen Ausdruck durch $f(+q, +q')$, den entsprechenden Ausdruck für das positive Quantum in ds und das negative Quantum in ds' durch $f(+q, -q')$ u. s. f., so erhalten wir für die X-Componente der Wirkung, welche die beiden in ds' enthaltenen Quanta auf die beiden in ds enthaltenen Quanta ausüben:

$$X = f(+q, +q') + f(+q, -q') + f(-q, +q') + f(-q, -q').$$

Die Ausrechnung liefert:

$$X = -4\lambda J.4\lambda J'.ds\,ds'\,\frac{\cos\alpha}{r^2}\,(\cos\theta - \tfrac{3}{2}\cos\delta\cos\delta').$$

Hieraus ergiebt sich endlich für die Kraft, welche das Element ds' auf das Element ds in der Richtung von ds nach ds' ausübt, wenn noch die Grössen $4\lambda J$ und $4\lambda J'$, die sogenannten Intensitäten der Ströme, durch i und i' bezeichnet werden, folgender Ausdruck:

$$\text{I.}\quad \mathfrak{A} = \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\,(\cos\theta - \tfrac{3}{2}\cos\delta\cos\delta').$$

Dies ist die von Ampère aufgestellte elektrodynamische Formel. Es können derselben noch einige andere bemerkenswerthe Formen gegeben werden, welche in der Folge Anwendung finden und daher hier aufgeführt werden sollen.

Aus der Betrachtung eines körperlichen Dreiecks, dessen Kanten mit den Richtungen der Elemente und ihrer Verbindungslinie parallel sind, ergiebt sich, wenn ε den Winkel bezeichnet, den die beiden durch je ein Element und die Verbindungslinie der Elemente bestimmten Ebenen einschliessen:

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\theta - \cos\delta\cos\delta'}{\sin\delta\sin\delta'}.$$

Hiernach ist:

$$\text{II.}\quad \mathfrak{A} = \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\,(\cos\varepsilon\sin\delta\sin\delta' - \tfrac{1}{2}\cos\delta\cos\delta').$$

Die Grössen r, δ, δ' und ε kann man als Functionen der Bogen auffassen, welche die Lage der Elemente auf den linearen Strömen bestimmen und die wir in der Strömungsrichtung der positiven Elektricität nehmen wollen. Man hat alsdann, wie man leicht einsieht:

$$1.)\ dr = -ds'\cos\delta',\quad 2.)\ dr = ds\cos\delta.$$

Betrachtet man ferner das körperliche Dreieck, dessen Kanten parallel sind mit der Linie r, welche die Anfangspunkte der Elemente verbindet, mit der Richtung des Elementes ds' und mit der Linie, welche den Anfangspunkt des letzten Elementes mit dem Endpunkte von ds verbindet und die mit ds' den Winkel δ'_1 und mit r den Winkel ψ bilde, so kommt:

$$\cos\varepsilon\sin\psi\sin\delta' = \cos\delta_1' - \cos\psi\cos\delta'.$$

Es ist aber, wenn man zur Grenze übergeht:

$$\sin\psi = \frac{\sin\delta\, ds}{r},\ \cos\psi = 1;$$

folglich hat man:

$$ds \cos\varepsilon \sin\delta \sin\delta' = r\,(\cos\delta'_1 - \cos\delta').$$

Ferner ist wegen der Gleichung 1.):

$$\cos\delta'_1 - \cos\delta' = -\sin\delta' \frac{d\delta'}{ds} ds = -\frac{d^2 r}{ds\, ds'} ds,$$

und somit:

$$3.)\ \cos\varepsilon \sin\delta \sin\delta' = -r \frac{d^2 r}{ds\, ds'}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 1.) bis 3.) kann man nun setzen:

$$\mathfrak{A} = \frac{ii'\, ds\, ds'}{r^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'} - r\frac{d^2 r}{ds\, ds'}\right)$$

$$= -\frac{ii'\, ds\, ds'}{r^{1/2}}\cdot\frac{d\left\{r^{-1/2}\frac{dr}{ds'}\right\}}{ds} = -\frac{ii'\, ds\, ds'}{r^{1/2}}\cdot\frac{d\left(r^{-1/2}\frac{dr}{ds}\right)}{ds'},$$

oder auch:

$$\text{III.}\ \mathfrak{A} = -\frac{2ii'\, ds\, ds'}{\sqrt{r}}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\, ds'}.$$

Für die Anwendung der Ampère'schen Formel ist oft die Bemerkung von Vortheil, dass man jedes der beiden Stromelemente in ähnlicher Weise wie eine Kraft in Componenten zerlegen kann, ohne die resultirende Wirkung zu ändern. Ins Besondere kann man das Element ds durch drei an derselben Stelle wie ds befindliche, mit den Axen parallele Elemente mit der Stromintensität i ersetzen. Die Längen dieser Componenten werden durch die absoluten Werthe und die Richtungen ihrer Ströme durch die Vorzeichen der Ausdrücke:

$$dx = \cos\alpha\, ds,\ dy = \cos\beta\, ds,\ dz = \cos\gamma\, ds$$

bestimmt. Ebenso lässt sich ds' in drei Componenten mit der Intensität i' zerlegen, für welche man hat:

$$dx' = \cos\alpha'\, ds',\ dy' = \cos\beta'\, ds',\ dz' = \cos\gamma'\, ds'.$$

Litteratur. Ampère: Théorie des phénomènes electro-dynamiques, uniquement déduite de l'expérience. 1826. — Weber: Elektrodynamische Maassbestimmungen. 1846.

2. Von der Wechselwirkung zwischen linearen elektrischen Strömen.

a. Wirkung zwischen einem Strome und einem Stromelemente.

Die Kraft, welche ein linearer Strom S' auf ein Stromelement ds ausübt, ist die Resultante der Kräfte, welche die einzelnen Elemente ds' des Stromes auf das Stromelement ausüben. Es seien nun s_1' und s_2' die Bogen der Stromcurve für die Endpunkte des Stromes, und es sei s_1' kleiner als s_2', so dass sich die positive Elektricität von dem Endpunkte mit dem Bogen s_1' nach dem Endpunkte mit dem Bogen s_2' hinbewegt, da wir stets die Bogen in der Richtung der positiven Strömung rechnen. Alsdann hat man für die X-Componente der Kraft, welche der Strom S' auf das Element ds ausübt, wenn im Uebrigen die frühere Bezeichnungsweise beibehalten wird:

$$X = -\Sigma \mathfrak{A} \cos a = i i' \, ds \int_{s_1'}^{s_2'} \left\{ r - \tfrac{1}{2} \frac{dr}{ds} \right\} \frac{d\left\{ r - \tfrac{1}{2} \frac{dr}{ds} \right\}}{ds'} \cdot \frac{\cos a}{\cos \delta} \, ds'.$$

Durch theilweise Integration ergiebt sich hieraus:

$$\frac{2X}{i i' \, ds} = \frac{\cos a_2 \cos \delta_2}{r_2} - \frac{\cos a_1 \cos \delta_1}{r_1} - \int_{s_1'}^{s_2'} \frac{\cos \delta \, d(\cos a) - \cos a \, d(\cos \delta)}{r}.$$

Hier bedeuten a_1, δ_1, r_1 die Werthe der Grössen a, δ, r für den Endpunkt des Stromes mit dem kleineren Bogen s_1', während sich a_2, δ_2, r_2 auf den Endpunkt mit dem Bogen s_2' beziehen. Die Incremente $d(\cos a)$, $d(\cos \delta)$ entsprechen dem Incremente ds' des Strombogens s'.

Aus den Relationen:

$$r \cos a = x - x', \quad r \cos b = y - y', \quad r \cos c = z - z',$$
$$\cos \delta = \cos \alpha \, \cos a + \cos \beta \, \cos b + \cos \gamma \, \cos c$$

erhält man durch Differentiation in Bezug auf die Veränderliche s' für das in dem gefundenen Ausdrucke unter dem Integralzeichen stehende Differential:

$$\frac{1}{r}\Big\{\cos\beta\,[\cos b\; d(\cos a) - \cos a\; d(\cos b)] + \cos\gamma\,[\cos c\; d(\cos a) - \cos a\; d(\cos c)]\Big\}$$

$$= \cos\beta\,\frac{\cos a\; dy' - \cos b\; dx'}{r^2} + \cos\gamma\,\frac{\cos a\; dz' - \cos c\; dx'}{r^2}.$$

Hierfür kann man aber setzen:

$$\cos\beta\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}\,dy' - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'}\,dx'\right\} + \cos\gamma\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}\,dz' - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'}\,dx'\right\}.$$

Es ist daher auch:

$$\frac{2X}{i\,i'} = ds\left\{\frac{\cos a_2\,\cos\delta_2}{r_2} - \frac{\cos a_1\,\cos\delta_1}{r_1}\right\} + dy\int_{s_1'}^{s_2'}\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'}\,dx' - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}\,dy'\right\} - dz\int_{s_1'}^{s_2'}\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}\,dz' - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'}\,dx'\right\}.$$

Wenn der elektrische Strom S' in sich geschlossen ist, d. h. wenn seine Endpunkte zusammenfallen, so verschwindet in letzterem Ausdrucke der neben den Integralen auftretende Theil. Man erhält alsdann zunächst für die Componente X und hiernach durch cyclische Vertauschung der Buchstaben x, y, z für die beiden übrigen Componenten Y und Z:

$$\frac{2X}{ii'} = C\,dy - B\,dz,\quad \frac{2Y}{ii'} = A\,dz - C\,dx,$$

$$\frac{2Z}{ii'} = B\,dx - A\,dy,$$

wo für A, B, C folgende über den ganzen Strom S' sich erstreckende Integrale zu setzen sind:

$$A = \int\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'}\,dy' - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'}\,dz'\right\},\quad B = \int\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}\,dz' - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'}\,dx'\right\},\quad C = \int\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'}\,dx' - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}\,dy'\right\}.$$

Aus den obigen Ausdrücken ersieht man, dass die Kraft, womit ein in sich geschlossener Strom auf ein Stromelement einwirkt, auf dem Elemente senkrecht steht. Substituirt man nämlich die für die Componenten jener Kraft gewonnenen Ausdrücke in den Ausdruck $X dx + Y dy + Z dz$, welcher gleich dem Producte aus der Kraft, der Länge des Elementes und dem Cosinus des Winkels zwischen der Kraft und dem Elemente ist, so ergiebt sich, dass derselbe identisch gleich Null ist.

Es möge hier noch einer anderen Form der Ausdrücke für die Componenten X, Y, Z gedacht werden, die in der Folge angewandt werden soll. Wie man leicht einsieht, kann man für die erste Componente schreiben:

$$\frac{2X}{ii'} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'} (dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz')$$

$$+ \int dx' \left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'} dx + \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'} dy + \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'} dz \right).$$

Da man nun hat:

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx}, \quad \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy}, \quad \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz},$$

so ergiebt sich zunächst für die Componente X und sodann für die Componenten Y und Z:

$$\frac{2X}{ii'} = ds \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} \cos\theta \, ds' - ds \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} dx',$$

$$\frac{2Y}{ii'} = ds \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} \cos\theta \, ds' - ds \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} dy',$$

$$\frac{2Z}{ii'} = ds \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} \cos\theta \, ds' - ds \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} dz'.$$

b. Wirkung zwischen zwei in sich geschlossenen Strömen.

Die Kräfte, welche ein in sich geschlossener Strom S' auf die einzelnen Elemente eines zweiten Stromes S ausübt, lassen sich in ihrer Gesammtheit ersetzen durch eine im Anfangspunkte der Coordinaten angreifende resultirende Kraft und ein zugehöriges resultirendes Gegenpaar. Bezeichnet man die Componenten jener Kraft nach den Axen durch X, Y, Z, die des Gegenpaares durch Ξ, H, Z und wird durch Σ eine Summation über die Elemente des Stromes S angedeutet, so ist:

$$\mathrm{X} = \Sigma X, \quad \mathrm{Y} = \Sigma Y, \quad \mathrm{Z} = \Sigma Z,$$

$$\Xi = \Sigma\,(Zy - Yz)\,, \; \mathrm{H} = \Sigma\,(Xz - Zx), \mathrm{Z} = \Sigma\,(Yx - Xy).$$

Nach Substitution der zuletzt für die Componenten X, Y, Z gewonnenen Ausdrücke treten in diesen Gleichungen unter anderen Integrale von der Form $\int\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds}\, du'\, ds$, sowie von der Form $\int\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds}\, u\, dv'\, ds$ auf, wo u und v irgend zwei der Buchstaben x, y, z bedeuten. Man bemerke nun, dass die Integrale von der ersten Form verschwinden, wenn sich die Integration nach s über eine geschlossene Curve erstreckt, und dass in demselben Falle die Integrale von der zweiten Form durch theilweise Integration in $-\int\int \frac{du\, dv'}{r}$ umgewandelt werden können. Hiernach ergiebt sich für die resultirende Kraft und das resultirende Gegenpaar, durch welche die Wirkung des in sich geschlossenen Stromes S' auf den gleichfalls in sich geschlossenen Strom S dargestellt wird:

$$\frac{2\,\mathrm{X}}{ii'} = \int\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} \cos\theta\, ds\, ds',$$

$$\frac{2\,\mathrm{Y}}{ii'} = \int\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} \cos\theta\, ds\, ds',$$

$$\frac{2\,\mathrm{Z}}{i\,i'} = \int\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,z} \cos\theta\, d\,s\, d\,s',$$

$$\frac{2\,\Xi}{i\,i'} = \int\int \left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,z}\, y - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,y}\, z \right) \cos\theta\, d\,s\, d\,s'$$
$$+ \int\int \frac{d\,y\, d\,z' - d\,z\, d\,y'}{r},$$

$$\frac{2\mathrm{H}}{i\,i'} = \int\int \left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,x}\, z - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,z}\, x \right) \cos\theta\, d\,s\, d\,s'$$
$$+ \int\int \frac{d\,z\, d\,x' - d\,x\, d\,z'}{r},$$

$$\frac{2\mathrm{Z}}{i\,i'} = \int\int \left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,y}\, x - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,x}\, y \right) \cos\theta\, d\,s\, d\,s'$$
$$+ \int\int \frac{d\,x\, d\,y' - d\,y\, d\,x'}{r}.$$

Vertauscht man in den obigen Ausdrücken die Coordinaten x, y, z mit den Coordinaten x', y', z', so gewinnt man die entsprechenden Ausdrücke für die Wirkung, welche der Strom S auf den Strom S' ausübt. Diese Wirkung ist derjenigen, welche S' auf S ausübt, entgegengesetzt gleich.

Die Wechselwirkung zwischen zwei in sich geschlossenen, linearen, elektrichen Strömen lässt sich in sehr einfacher Weise mittelst des sogenannten Potentiales der Ströme in Bezug auf einander darstellen. Man versteht hierunter den folgenden Ausdruck, in welchem die einzelnen Buchstaben dieselben Grössen wie bisher bezeichnen und die Integrationen sich beziehungsweise über den ganzen Umkreis des einen und des anderen Stromes erstrecken:

$$\frac{i\,i'}{2}\int\int \frac{\cos\theta}{r}\, d\,s\, d\,s' = W.$$

Verschiebt man den Strom S, ohne ihn zu drehen, parallel

mit der x-Axe um das Differential dx, so ändert sich hierdurch in dem Ausdrucke W nur die Grösse r, während der Winkel θ für je ein Element des einen Stromes und ein Element des zweiten Stromes ungeändert bleibt. Wenn also dW die der Verschiebung dx entsprechende Aenderung von W ist, so hat man:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{ii'}{2} \int \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} \cos\theta \, ds \, ds'.$$

Analoge Relationen ergeben sich für Verschiebungen nach der y-Axe und der z-Axe, so dass man hat:

$$X = \frac{dW}{dx}, \ Y = \frac{dW}{dy}, \ Z = \frac{dW}{dz}.$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die Componenten des resultirenden Gegenpaares darstellen. Von einem Elemente ds des Stromes S werde ein Perpendikel t auf die x-Axe herabgelassen. Der Winkel, welchen dieses Perpendikel mit der xy-Ebene bildet, werde durch ξ bezeichnet und in demselben Sinne wie oben die Componente Ξ gerechnet. Wenn man nun den Strom S um die Axe der x dreht, so dass t den Winkel $d\xi$ beschreibt, so ändert sich hierbei in dem Ausdrucke W sowohl r wie auch θ. Was die erste Grösse betrifft, so hat man für das Element ds und ein Element ds' des Stromes S', da die Coordinate x des Elementes ds ungeändert bleibt:

$$r\,dr = (y - y')\,dy + (z - z')\,dz,$$

wo durch dr, dy, dz die durch die Drehung bedingten Aenderungen der Grössen r, y, z bezeichnet sind.

Da ferner:

$$y = t \cos\xi \ , \ z = t \sin\xi,$$

so ist, wenn noch die Neigungen der Linie r gegen die Axen eingeführt werden:

$$1.)\ dr = (\cos c \,.\, y - \cos b \,.\, z)\,d\xi.$$

Mittelst eines körperlichen Dreiecks, dessen Kanten der x-Axe, der y-Axe und dem Elemente ds parallel sind, findet man, wenn μ eine gewisse Constante bedeutet:

$$\cos\beta = \sin\alpha \cos(\xi + \mu).$$

Ein zweites körperliches Dreieck, dessen Kanten mit der x-Axe, der z-Axe und dem Elemente ds parallel sind, liefert:

$$\cos\gamma = \sin\alpha \sin(\xi + \mu).$$

Hieraus und indem man bemerkt, dass die Neigung des Elementes ds gegen die x-Axe bei einer Rotation um letztere ungeändert bleibt, findet man für die Aenderung, welche der Cosinus des Winkels zwischen ds und ds' durch die Drehung erleidet:

$$2.)\quad d(\cos\theta) = (\cos\beta \cos\gamma' - \cos\gamma \cos\beta')\, d\xi.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen 1.) und 2.) findet man jetzt für das der Drehung $d\xi$ entsprechende Increment dW des Potentiales nach einigen nahe liegenden Umformungen:

$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{ii'}{2}\int\int\left\{\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz}\, y - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy}\, z\right]\cos\theta\, ds\, ds' + \frac{dy\, dz' - dz\, dy'}{r}\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn den Buchstaben η und ζ analoge Bedeutungen, wie dem Buchstaben ξ, beigelegt werden:

$$\Xi = \frac{dW}{d\xi},\ \mathrm{H} = \frac{dW}{d\eta},\ \mathrm{Z} = \frac{dW}{d\zeta}.$$

Wie die Wechselwirkung zwischen zwei linearen elektrischen Strömen, so lässt sich auch die Arbeit, welche bei einer Bewegung der Ströme von den zwischen ihnen thätigen elektrodynamischen Kräften geleistet wird, in einfacher Weise mittelst des Potentiales der Ströme in Bezug auf einander darstellen. Es werde erstlich die Lage des Stromes S in der Art geändert, dass jeder Punkt desselben einen unendlich kleinen Weg beschreibt. Diese Bewegung kann bekanntlich stets angesehen werden als resultirend aus drei unendlich kleinen Verschiebungen dx, dy, dz nach den Coordinatenaxen und drei unendlich kleinen Rotationen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ um dieselben Axen. Hiernach ergiebt sich für die entsprechende Arbeit aller an den Elementen von S angreifenden elektrischen Kräfte:

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz + \Xi\,d\xi + \mathrm{H}\,d\eta + \mathrm{Z}\,d\zeta.$$

Es werde ferner auch die Lage des Stromes S' geändert.

Die componirenden Verschiebungen und Rotationen seien dx', $d\xi'$ u. s. f. und die Componenten der resultirenden Kraft und des resultirenden Gegenpaares aller an S' angreifenden elektrischen Kräfte seien X', Ξ' u. s. f. Alsdann leisten die letztgenannten Kräfte die Arbeit:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + \Xi' d\xi' + H' d\eta' + Z' d\zeta'.$$

Die Summe der beiden obigen Ausdrücke stellt die Arbeit dar, welche von sämmtlichen elektrischen Kräften geleistet wird, wenn sich die Lage des einen und des anderen Stromes gleichzeitig in der angegebenen Weise ändert. Jene Summe ist aber nach dem Frühern gleich der Aenderung, welche das Potential W durch die Aenderung der relativen Lage der Ströme erleidet. Hieraus folgt, dass ganz allgemein die Arbeit, welche bei jeder beliebigen Bewegung der Ströme von den elektrodynamischen Kräften geleistet wird, durch die Aenderung dargestellt wird, welche das Potential der Ströme in Bezug auf einander hierbei erleidet.

Das obige Resultat möge auf die Bewegung zweier linearer elektrischer Ströme angewandt werden, deren Träger etwa noch mit anderen ponderablen Massen in Verbindung stehen und, wie auch diese Massen, der Wirkung anderer als der zwischen den Strömen thätigen elektrodynamischen Kräfte ausgesetzt sind. Es sei m das Element der ponderablen Materie des von beiden Strömen gebildeten Systemes. Zur Zeit 0 besitze m die Geschwindigkeit v_0, zur Zeit t die Geschwindigkeit v, so dass, wenn eine Summation über die Massenelemente des ganzen Systemes durch Σ angedeutet wird, $\Sigma m v_0^2$ und $\Sigma m v^2$ die lebendige Kraft des Systemes für die genannten Zeiten ist. Ferner seien für dieselben Zeiten W_0 und W die Werthe des Potentiales der Ströme in Bezug auf einander, und endlich werde durch N die Arbeit der Kräfte bezeichnet, welche neben den zwischen den Strömen thätigen elektrodynamischen Kräften auftreten. Alsdann hat man in Gemässheit des Principes der Erhaltung der Kraft:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma m v_0^2 = N + W - W_0.$$

Hierbei ist aber unterstellt, dass von den inducirenden Wirkungen der Ströme abgesehen werden darf.

Das in der letzten Gleichung ausgesprochene Theorem gilt,

wie man leicht findet, auch dann noch, wenn sich die Gestalt der Stromträger während der Bewegung ändert, hierbei aber die Länge des Bogens zwischen irgend zwei Punkten einer Stromcurve ungeändert bleibt. Es gilt also z. B. für biegsame, aber nicht dehnbare Leiter, sowie für Leiter, welche aus starren, mit ihren Enden aneinanderstossenden und um diese drehbaren Stücken zusammengesetzt sind.

Litteratur. Neumann. Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1845 und 1847.

c. Experimentelle Prüfung der Ampère'schen Formel.

Aus der grossen Zahl der mannigfaltigen Versuche, welche die Ampère'sche Formel bestätigen, heben wir die mit besonderer Sorgfalt von Weber ausgeführte Prüfung dieser Formel hervor. (Elektrodynamische Maassbestimmungen, 1846). Weber beobachtete die gegenseitige Einwirkung zweier cylindrisch-ringförmigen, von einem und demselben elektrischen Strome durchflossenen Drahtrollen, und verglich die Resultate der Beobachtung mit den aus der gedachten Formel abgeleiteten Ausdrücken für dieselbe Wirkung. Die Mittelebenen beider Rollen standen senkrecht, und ihre Mittelpunkte lagen in derselben Horizontalebene. Die eine der Rollen war in den verschiedenen Versuchen fest; ihre Durchmesser betrugen 8,88 und 0,55, ihre Höhe 3 Centimeter. Die zweite Rolle war beweglich; sie war nämlich bifilar an zwei dünnen Metalldrähten, von denen zugleich der eine den Strom zuführte, der andere denselben ableitete, aufgehängt. Die beiden Durchmesser des von den Windungen eingenommenen Raumes betrugen bei der beweglichen Rolle 12,27 und 10,05 Centimeter, und seine Höhe wiederum 3 Centimeter. Die Bifilarrolle bestand aus circa 3000, die feste Rolle aus 10000 Windungen.

Wenn der elektrische Strom durch beide Rollen geschickt

wurde, erlitt die bewegliche Rolle eine Einwirkung, die sich in allen Fällen auf eine Kraft und ein Gegenpaar zurückführen liess, von denen jene im Mittelpunkte der Rolle angriff und ausser Acht gelassen werden konnte, während das Gegenpaar die Rolle aus der Gleichgewichtslage herausdrehte, die sie ursprünglich in Folge der Aufhängung einnahm. Die Grösse dieses Gegenpaares war es, welche in den verschiedenen Versuchen gemessen wurde.

Was die Stellung der Rollen betrifft, so stand die Bifilarrolle im Zustande des Gleichgewichts senkrecht zum magnetischen Meridiane. Die Mittelebene der festen Rolle blieb stets dem magnetischen Meridiane parallel. Diese Rolle wurde aber bei den Versuchen, die wir hier näher betrachten werden, nach und nach nördlich und südlich, östlich und westlich von der Bifilarrolle so aufgestellt, dass ihr Mittelpunkt der Reihe nach in 30, 40 und 50 Centimeter Entfernung von dem der beweglichen Rolle zu liegen kam. Bei einer jeden dieser 12 Stellungen wurde der Strom hergestellt; die Bifilarrolle begann um eine neue von der ursprünglichen wenig verschiedene Gleichgewichtslage zu oscilliren, und diese wurde nach Gauss'scher Methode mittelst Spiegel, Fernrohr und Scala bestimmt. Hierauf wurde die Richtung des Stromes in der festen Rolle mittelst eines Commutators umgekehrt und wiederum die Gleichgewichtslage der beweglichen Rolle bestimmt; die Differenz der beiden so beobachteten Zahlen der Scala lieferte die doppelte Ablenkung der Bifilarrolle in Skalentheilen.

Die beobachteten Ablenkungen erheischen eine zweifache Correction wegen der Schwankungen, welchen die Intensität des elektrischen Stromes unterworfen war, und wegen des Einflusses, welchen der Magnetismus der Erde auf die bewegliche Rolle ausübte. Um diese Correctionen ausführen zu können, mussten die Intensitäten des Stromes in den einzelnen Versuchen verglichen werden.

Zu dem Ende wurde eine Abzweigung des Stromes durch eine Multiplicatorrolle geschickt und ebenso wie bei der Bifilarrolle die Ablenkung bestimmt, welche sie an einem Magnetometer hervorbrachte. Die Multiplicatorrolle war parallel mit dem magnetischen Meridiane und in so grosser Entfernung von der Bifilarrolle aufgestellt, dass ihre Einwirkung auf letztere ausser Acht gelassen

werden konnte. Die Mitte der Magnetometernadel lag auf der Axe der Multiplicatorrolle. Vorgreifend bemerken wir, dass die Tangenten der an dieser Galvanometervorrichtung beobachteten Ablenkungswinkel ein Maass für die Stromstärke abgaben. (S. II. 2: über die Wirkung zwischen elektrischen Strömen und Magneten.) Um aber den Ablenkungsbogen in Theilen des Radius Eins zu erhalten, muss man die beobachtete Ablenkung in Theilen der Skala durch die Entfernung des Spiegels von der Skala ebenfalls in Theilen der Skala dividiren, den Bogen aufsuchen, dessen Tangente dem so gewonnenen Quotienten gleichkommt, und diesen Bogen halbiren. Bei den hier zu besprechenden Versuchen konnte man, da die Ablenkungen sehr klein waren, die Ablenkungen in Theilen der Skala als proportional mit den Ablenkungsbogen betrachten, ohne dadurch Fehler herbeizuführen, die den Beobachtungsfehlern gleichkämen.

Auf die oben angegebene Weise gewann Weber die in folgender Tabelle zusammengestellten Resultate:

Abstand	Nördlich			Südlich		
	30	40	50	30	40	50
Doppelte Ablenkung der Bifilarrolle in Skalentheilen . .	78,08	36,15	20,30	78,85	35,43	19,49
Doppelte Ablenkung des Magnetometer in Skalentheilen	298,33	302,07	312,48	299,89	299,30	305,56

Abstand	Oestlich			Westlich		
	30	40	50	30	40	50
Doppelte Ablenkung der Bifilarrolle in Skalentheilen . .	190,08	81,64	42,89	192,17	79,60	44,31
Doppelte Ablenkung des Magnetometer in Skalentheilen	297,30	303,79	308,80	297,81	300,81	314,32

Die Stellung der Bifilarrolle wurde bedingt durch das Gleichgewicht zwischen der Torsionswirkung, der Wirkung des Erd-

magnetismus und der Wechselwirkung zwischen den festen und beweglichen Theilen der Stromleitung. Es konnte daher auf die letzte Wirkung aus den beobachteten Ablenkungen erst geschlossen werden, nachdem die beiden erst genannten Wirkungen ermittelt waren.

Um nun das Torsionsmoment der Bifilarrolle zu finden, wurde erstlich ihr Trägheitsmoment nach Gauss'scher Methode gesucht und für das Centimeter als Einheit der Linie, das Gramm als Einheit der Masse gleich 8648 gefunden. Sodann wurde die Dauer einer ganzen Oscillation gleich 26,6518 Secunden gefunden. Hiernach hat man für das Gegenpaar T, welches die Rolle in ihre Gleichgewichtslage zurückzudrehen strebte, wenn sie die Ablenkung α erlitten hatte:

$$T = 480{,}64\ \alpha.$$

Ferner wurde durch eine Methode, die in der Folge auseinandergesetzt werden soll (S. II. 2: über die Wirkung zwischen elektrischen Strömen und Magneten), gefunden, dass die horizontale Componente E des Gegenpaares, welches die Wirkung der Erde auf die Bifilarrolle darstellte, sich wie folgt ausdrückte, wenn γ die doppelte Ablenkung des Galvanometers in Skalentheilen, α wiederum den Ablenkungsbogen der Bifilarrolle bedeutet:

$$E = 0{,}194\ \alpha\gamma.$$

Die Richtung des Stromes in der Bifilarrolle war stets eine solche, dass der Erdmagnetismus in gleichem Sinne mit den elektrodynamischen Kräften wirkte; daher hatte man, unter G das Gegenpaar verstanden, welches die Wirkung der festen Theile der Stromleitung auf die beweglichen darstellte:

$$T = E + G,$$

und folglich:

$$G = \left(1 - \frac{194}{480640}\,\gamma\right) T.$$

Aus letzterer Relation ersehen wir, dass man die oben aufgeführten Werthe der doppelten Ablenkung der Bifilarrolle mit dem Factor $1 - \frac{194}{480640}\,\gamma$ multipliciren müsse, um die reine elektrodynamische Wirkung zu erhalten und den Einfluss des Erdmagnetismus zu eliminiren. Es ergeben sich so die folgenden Werthe:

Abstand	Nördlich			Südlich		
	30	40	50	30	40	50
Doppelte corrigirte Ablenkung der Bifilarrolle	68,67	31,74	17,74	69,30	31,15	17,09

Abstand	Oestlich			Westlich		
	30	40	50	30	40	50
Doppelte corrigirte Ablenkung der Bifilarrolle	167,26	71,63	37,54	169,06	69,93	38,69

Es erübrigt endlich noch, die Ablenkungen auf gleiche Stromstärke zu reduciren. Die elektrodynamische Wirkung ist in unserem Falle der Ampère'schen Formel zufolge mit dem Quadrate der Intensität proportional. Wenn wir daher mit Weber alle Ablenkungen auf den Strom reduciren wollen, dem in der angewandten Galvanometervorrichtung die doppelte Ablenkung $\sqrt{100000}$ entspricht, so haben wir die oben aufgeführten doppelten Ablenkungen der Bifilarrolle mit $100000:\gamma^2$ zu multipliciren, unter γ die jedesmalige doppelte Ablenkung des Galvanometers verstanden. Auf diese Weise ergeben sich für die reine elektrodynamische Wirkung und für eine und dieselbe Stromstärke die folgenden Werthe:

Abstand	Nördlich			Südlich		
	30	40	50	30	40	50
Doppelte Ablenkung	77,16	34,78	18,17	77,06	34,77	18,30

Abstand	Oestlich			Westlich		
	30	40	50	30	40	50
Doppelte Ablenkung	189,24	77,61	39,37	190,62	77,28	39,16

Man sieht leicht von vornherein ein, dass die beiden Ablenkungen für die nördliche und südliche Lage der festen Rolle bei gleichem Abstande hätten gleich sein müssen, und ebenso die einander entsprechenden Ablenkungen für die östliche und westliche Lage der festen Rolle. In der That weichen sie nur um Weniges von einander ab. Nehmen wir die Mittel der sich entsprechenden Zahlen, so kommt:

Abstand	Nord-Süd			Ost-West		
	30	40	50	30	40	50
Doppelte Ablenkung	77,11	34,77	18,24	189,93	77,45	39,27

Dieses sind die Zahlen, welche eine Vergleichung mit der Theorie gestatten. Es sind dieselben aber aufzufassen als die Werthe des Gegenpaares, welches aus der Einwirkung der festen Rolle auf die bewegliche resultirt. Von der Einwirkung der galvanischen Säule, welche den elektrischen Strom lieferte, der Multiplicatorrolle, des Galvanometers und der entfernteren Theile der Leitungsdrähte konnte wegen ihrer Entfernung abgesehen werden; auch die Einwirkung des näher gelegenen Zuleitungs- und Ableitungs-Drahtes der festen Rolle kam ausser Betracht, indem sie um einander gewunden waren und folglich die Totalwirkung der in ihnen enthaltenen Theilströme wegen ihrer entgegengesetzten Richtungen zum grössten Theile verschwinden musste. Auch leuchtet ein, dass die Einwirkung, welche die Aufhängungsdrähte der Bifilarrolle erlitten, ganz zu vernachlässigen war. Die beobachteten Drehungsmomente können wir also als resultirend betrachten aus den Theilwirkungen, welche jede Windung der festen Rolle auf jede Windung der beweglichen Rolle ausübte, und ohne merklichen Fehler wird man bei Berechnung dieser Wirkungen von der kleinen Ablenkung der Bifilarrolle absehen, sowie auch die einzelne Windung als einen in sich geschlossenen Kreisstrom betrachten dürfen.

Hiernach erheischt die Vergleichung des Versuches mit der Theorie vor Allem die Erörterung der Wirkung zwischen zwei Kreisströmen, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen und

sich in einer zur Verbindungslinie der Centra senkrechten Geraden schneiden.

Wir betrachten zunächst die Wirkung eines mit der yz-Ebene parallelen Kreisstromes K', dessen Mittelpunkt in der xy-Ebene liegt, auf ein im Coordinatenanfangspunkte befindliches Stromelement. Die Coordinaten des Mittelpunktes seien $x = a$, $y = b$ und der Radius R'. Wir haben dann allgemein:

$$\frac{2X}{ii'} = Cdy - Bdz, \quad \frac{2Y}{ii'} = Adz - Cdx, \quad \frac{2Z}{ii'} = Bdx - Ady,$$

$$A = \int \frac{y'dz' - z'dy'}{r^3}, B = \int \frac{z'dx' - x'dz'}{r^3}, \quad C = \int \frac{x'dy' - y'dx'}{r^3}.$$

In unserem Falle kommt aber, wenn wir den Winkel, welchen irgend ein Radius des Kreises mit der xy-Ebene oder der y-Axe bildet, durch φ' bezeichnen:

$$x' = a, \quad y' = b + R' \cos\varphi', \quad z' = R' \sin\varphi',$$
$$dx' = o, \; dy' = -R' \sin\varphi' d\varphi', \; dz' = R' \cos\varphi' d\varphi'.$$

Mit Rücksicht hierauf findet man, wenn man noch bedenkt, dass $\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi' d\varphi'}{r^3}$ aus lauter Paaren entgegengesetzt gleicher Differentiale besteht und somit verschwindet:

$$A = R'^2 \int \frac{d\varphi'}{r^3} + bR' \int \frac{\cos\varphi' d\varphi'}{r^3}, \; B = -aR' \int \frac{\cos\varphi' d\varphi'}{r^3}, \; C = 0,$$

wo die Integration über das Intervall von 0 bis 2π auszudehnen ist. Die theilweise Integration liefert aber für dieselben Grenzen:

$$\int \frac{\cos\varphi' d\varphi'}{r^3} = 3 \int \frac{\sin\varphi' dr}{r^4},$$

oder, da die Relation:

$$r^2 = a^2 + b^2 + R'^2 + 2bR' \cos\varphi'$$

besteht:

$$\int \frac{\cos\varphi' d\varphi'}{r^3} = -3bR' \int \frac{\sin\varphi'^2 d\varphi'}{r^5}.$$

Somit kann man schreiben:

$$A = R'^2 \int \frac{d\varphi'}{r^3} - 3b^2 R'^2 \int \frac{\sin\varphi'^2 d\varphi'}{r^5},$$

$$B = 3abR'^2 \int \frac{\sin\varphi'^2 d\varphi'}{r^5}, \; C = 0,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{2X}{ii'} = - dz \,.\, 3\,ab\,R'^2 \int \frac{\sin\varphi'^2\, d\varphi'}{r^5},$$

$$\frac{2Y}{ii'} = dz \left\{ R'^2 \int \frac{d\varphi'}{r^3} - 3b^2 R'^2 \int \frac{\sin\varphi'^2\, d\varphi'}{r^5} \right\},$$

$$\frac{2Z}{ii'} = - dy \left\{ R'^2 \int \frac{d\varphi'}{r^3} - 3b^2 R'^2 \int \frac{\sin\varphi'^2\, d\varphi'}{r^5} \right\}$$

$$+ dx \,.\, 3\,ab\,R'^2 \int \frac{\sin\varphi'^2\, d\varphi'}{r^5},$$

wo zu setzen ist:

$$r^2 = a^2 + b^2 + R'^2 + 2\,b\,R' \cos\varphi'.$$

Wir wenden jetzt obige Formeln an, um die Wirkung des Kreisstromes K' auf einen zweiten Kreisstrom K zu bestimmen, der in der xz-Ebene liegt und zum Mittelpunkte den Coordinatenanfangspunkt hat. Es handelt sich aber für die Folge nur um das Drehungsmoment der an K angreifenden Kräfte in Bezug auf die z-Axe und wir begnügen uns daher auch damit, diesen Theil der zwischen den Kreisen stattfindenden Wechselwirkung zu finden. Für das fragliche Moment hat man:

$$\mathrm{Z} = \Sigma\, Yx,$$

wenn Y die Componente der Wirkung ist, welche K' auf ein Element ds des Kreisstromes K ausübt. Um zunächst diese Componente mittelst der oben gefundenen Ausdrücke für die Wirkung auf ein im Anfangspunkte gelegenes Element zu erhalten, legen wir durch ds neue Coordinatenaxen, die Axe der x_1 parallel mit der der x und die Ebene der $x_1\, y_1$ durch den Mittelpunkt von K'. Es ist dann, unter δ den Winkel zwischen den Axen der y und der y_1 verstanden:

$$Y = Y_1 \cos\delta + Z_1 \sin\delta.$$

Die Componenten Y_1 und Z_1 lassen sich mittelst der früheren Formeln finden; es kommt:

$$\frac{2Y_1}{ii'} = dz_1 \left\{ R'^2 \int \frac{d\varphi'}{r^3} - 3\,b_1^2\, R'^2 \int \frac{\sin\varphi'^2\, d\varphi'}{r^5} \right\},$$

$$\frac{2Z_1}{ii'} = - dy_1 \left\{ R'^2 \int \frac{d\varphi'}{r^3} - 3\,b_1^2\, R'^2 \int \frac{\sin\varphi'^2\, d\varphi'}{r^5} \right\}$$

$$+ dx_1 \,.\, 3\,a_1\, b_1\, R'^2 \int \frac{\sin\varphi'^2\, d\varphi'}{r^5},$$

wo zu setzen ist:

$$a_1 = a - x,\ b_1^2 = b^2 + z^2,\ r^2 = a^2 + b^2 + R^2 + R'^2 - 2\,ax + 2\sqrt{b^2+z^2}\,.\,R'\cos\varphi'.$$

Da man ferner hat:

$$dx_1 = dx,\ dz_1\cos\delta - dy_1\sin\delta = dz,\ \sin\delta = \frac{z}{b_1},$$

so findet man durch Substitution:

$$\frac{2Z}{ii'} = \int dz\,.\,x\left\{R'^2\int\frac{d\varphi'}{r^3} - 3b_1^2R'^2\int\frac{\sin\varphi'^2\,d\varphi'}{r^5}\right\} + \int dx\,.\,xz\,.\,3a_1R'^2\int\frac{\sin\varphi'^2\,d\varphi'}{r^5}\,.$$

Bezeichnen wir den Winkel, welchen der Radius R eines Elementes ds von K mit der z-Axe bildet, durch φ, so ist:

$$x = R\sin\varphi,\ z = R\cos\varphi,$$

und man erhält somit:

$$\frac{2Z}{ii'} = -R^2R'^2\int\int\frac{\sin\varphi^2}{r^3}\,d\varphi\,d\varphi' + 3R^2R'^2\int\int\frac{\sin\varphi'^2}{r^5}\left\{b^2\sin\varphi^2 + aR\sin\varphi\cos\varphi^2\right\}d\varphi\,d\varphi',$$

wo zu setzen ist:

$$r^2 = a^2 + b^2 + R^2 + R'^2 - 2aR\sin\varphi + 2\sqrt{b^2+R^2\cos\varphi^2}\,.\,R'\cos\varphi'.$$

Für die besonderen Lagen der beiden Kreise, welche in den erwähnten Versuchen zur Sprache kommen, ergeben sich folgende Resultate.

1.) $a = 0$. Die Ebene des Kreises K' geht durch den Mittelpunkt von K.

$$\frac{2Z}{ii'R^2R'^2} = 3b^2\int d\varphi\sin\varphi^2\int\frac{d\varphi'\sin\varphi'^2}{r^5} - \int d\varphi\sin\varphi^2\int\frac{d\varphi'}{r^3},$$

$$r^2 = b^2 + R^2 + R'^2 + 2\sqrt{b^2+R^2\cos\varphi^2}\,.\,R'\cos\varphi'.$$

2.) $b = 0$. Die Ebene des Kreises K geht durch den Mittelpunkt von K'.

$$\frac{2Z}{ii'R^2R'^2} = 3aR\int d\varphi\sin\varphi\cos\varphi^2\int\frac{d\varphi'\sin\varphi'^2}{r^5} - \int d\varphi\sin\varphi^2\int\frac{d\varphi'}{r^3},$$

$$r^2 = a^2 + R^2 + R'^2 - 2aR\sin\varphi + 2RR'\cos\varphi\cos\varphi'.$$

Um die erste Integration in obigen Ausdrücken auszuführen, setzen wir:

$$r^2 = l^2 + k\cos\varphi',$$

entwickeln nach Potenzen von $\cos\varphi'$ und finden mit Rücksicht auf die Grenzen der Integration:

$$\int\frac{d\varphi'}{r^3}=\frac{2\pi}{l^3}\left\{1+\frac{30}{32}\cdot\frac{k^2}{l^4}+\frac{945}{1024}\cdot\frac{k^4}{l^8}+\cdots\cdots\right\},$$

$$\int\frac{\sin\varphi'^2 d\varphi'}{r^5}=\frac{\pi}{l^5}\left\{1+\frac{35}{32}\cdot\frac{k^2}{l^4}+\frac{1155}{1024}\cdot\frac{k^4}{l^8}+\cdots\right\}.$$

Substituiren wir die letzten Ausdrücke und führen wir hierauf die zweite Integration aus, so kommt für den ersten Fall, wenn $a=0$ ist, und für b, d. i. die Entfernung der Centra, d gesetzt wird:

$$\frac{2Z_1}{ii'\pi^2}=$$

$$\frac{R^2R'^2}{l^3}\left\{\frac{1}{l^2}(3d^2-2l^2)+\frac{15}{32l^6}(7d^2-4l^2)(4d^2+R^2)R'^2\right.$$

$$\left.+\frac{315}{512l^{10}}(11d^2-6l^2)(8d^4+4d^2R^2+R^4)R'^4+\cdots\cdots\right\},$$

wo zu setzen ist:

$$l^2=d^2+R^2+R'^2.$$

In dem zweiten Falle, wenn $b=0$ ist, setzen wir:

$$l^2=a^2+R^2+R'^2-2aR\sin\varphi=l'^2-k'$$

und finden zunächst für die Glieder mit geraden Potenzen von k' in der Entwicklung von $\int\frac{d\varphi'}{r^3}$:

$$\frac{2\pi}{l'^3}\left\{1+\frac{30(k^2+2k'^2)}{32l'^4}+\frac{315(3k^4+24k^2k'^2+8k'^4)}{1024l'^8}+\cdots\right\}.$$

Ferner ergiebt sich für die Glieder mit ungeraden Potenzen von k' in der Entwicklung von $\int\frac{\sin\varphi'^2 d\varphi'}{r^5}$:

$$\frac{\pi}{l'^5}\left\{\frac{5k'}{2l'^2}+\frac{315(3k^2k'+4k'^3)}{192l'^6}+\cdots\cdots\right\}.$$

Hiernach hat man, wenn wieder die Entfernung der Centra durch d bezeichnet wird:

$$\frac{2Z_2}{ii'\pi^2}=$$

$$-\frac{R^2R'^2}{l^3}\left\{2+\frac{15}{8l^4}(4d^2+R'^2)R^2+\right.$$

$$\left.\frac{945}{256l^8}(8d^4+4d^2R'^2+R'^4)R^4+\cdots\right\},$$

wo wiederum zu setzen ist:

$$l^2 = d^2 + R^2 + R'^2.$$

Bei der Anwendung der obigen Formeln auf die Weber'schen Versuche darf man erstlich annehmen, dass die Wirkung, welche die Bifilarrolle erleidet, merklich proportional mit der Wirkung ist, welche ein Kreis erleidet, der in der Mittelebene liegt, und dessen Radius dem arithmetischen Mittel der beiden Radien der Rolle gleichkommt und somit 5,58 Centimeter misst. Ferner leuchtet ein, dass die feste Rolle durch ein System concentrischer Kreisströme von gleicher Intensität ersetzt werden könne, die in der Mittelebene der Rolle liegen, und deren Radien stetig von 0 bis 4,44 Centimeter wachsen.

Für das Gegenpaar also, welches an der beweglichen Rolle wirkt, hat man, unter c eine gewisse Constante verstanden:

$$G = c \int_0^{R'} Z . dR',$$

wo für die obere Grenze der Integration der Radius der festen Rolle zu nehmen ist. Beziehen sich also die Marken 1 und 2 auf den ersten und zweiten der oben näher bezeichneten Fälle, so hat man erstlich, wenn nur die drei ersten Glieder der Entwicklung beibehalten werden:

$$2\,G_1 : c\,i\,i'\,\pi^2 =$$

$$R^2\left\{-2\left(log\,\frac{l+R'}{s} - \frac{R'}{l}\right) + \frac{d^2}{s^2}\left(\frac{R'}{l}\right)^3\right.$$

$$\left. + \frac{3}{32}\left(4\,\frac{d^2}{s^2} + \frac{R^2}{s^2}\right)\left(5\,\frac{d^2}{l^2} + 2\,\frac{d^2}{s^2} - 4\right)\left(\frac{R'}{l}\right)^5 + E_1\right\}.$$

Hier ist zu setzen:

$$l^2 = s^2 + R'^2 = d^2 + R^2 + R'^2;$$

ferner bedeutet E_1 das Integral des dritten Gliedes in der Entwicklung für $\frac{2\,Z_1}{i\,i'\,\pi^2}$, wofür man annähernd setzen kann:

$$E_1 = \frac{45}{64} \cdot \frac{d^4}{s^4}\left(11\,\frac{d^2}{s^2} - 6\right)\left(\frac{R'}{s}\right)^7.$$

Man findet ferner für den zweiten Fall:

$$2\,G_2 : c\,i\,i'\,\pi^2 =$$

$$-R^2\left\{2\left(\log\frac{l+R'}{s}-\frac{R'}{l}\right)+\left(\frac{3}{8}+\frac{d^2}{s^2}\right)\frac{R^2R'}{s^2l}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{3}{4}\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{s^2}{l^2}\right]+\frac{1}{2}\left[3\,\frac{s^2}{l^2}-1\right]\frac{d^2}{s^2}\right)\frac{R^2R'}{l^3}+E_2\right\},$$

wo für E_2, das Integral des dritten Gliedes in der Entwicklung für $\frac{2Z_2}{i\,i'\,\pi^2}$, annähernd gesetzt werden kann:

$$E_2 = \frac{315}{32}\cdot\frac{d^4}{s^4}\cdot\frac{R^4R'^3}{s^7}.$$

Wir setzen jetzt in den obigen Ausdrücken $R = 5{,}58$, $R' = 4{,}44$ und für d der Reihe nach 30, 40, 50. Wir erhalten dann für den absoluten Werth von $2\,G : c\,i\,i'\,\pi^2$ in dem ersten Falle bezüglich 0,0291, 0,0131, 0,0068 und in dem zweiten Falle 0,0712, 0,0293, 0,0148. Diese Zahlen müssen, wofern die Ergebnisse der Theorie mit denen des Versuches im Einklang stehen sollen, in demselben Verhältnisse zu einander stehen wie die entsprechenden durch die Beobachtung gewonnenen Zahlen. Solches ist in der That nahe der Fall. Multiplicirt man nämlich die aus den Formeln gewonnenen Zahlen mit 2659, so ergeben sich die Werthe, welche in der folgenden Tabelle als berechnet mit den entsprechenden beobachteten Werthen zusammengestellt sind.

Abstand.		Nord = Süd.			Ost = West.		
		30	40	50	30	40	50
Doppelte Ablenkung	beobachtet . .	77,11	34,77	18,24	189,93	77,45	39,27
	berechnet . .	77,38	34,83	18,08	189,32	77,91	39,35

3. Von den elektrischen Elementarströmen.

Unter einem elektrischen Elementarstrome verstehen wir einen linearen, in sich geschlossenen Strom, dessen Bahn ein-

fach gekrümmt und von verschwindend kleiner Länge ist, so dass die von dem Strome umkreiste Fläche als ein Flächenelement mit unendlich kleinen Dimensionen angesehen werden kann. Es leuchtet von vornherein ein, dass die elektrodynamischen Formeln für die Wechselwirkung zwischen solchen Elementarströmen, sowie zwischen Elementar- und gewöhnlichen Strömen gewisse Vereinfachungen zulassen werden, und diese wollen wir jetzt für eine Reihe besonders wichtiger Fälle erzielen.

a. Wirkung zwischen einem Stromelemente und einem Elementarstrome.

Um die Wirkung zwischen einem Elementarstrome und einem Stromelemente zu ermitteln, legen wir die Coordinatenaxen durch das Stromelement und geben wir ihnen solche Richtungen, dass die z-Axe senkrecht zu der Ebene des Elementarstromes und ein Punkt O der von letzterem umflossenen Fläche in die xz-Ebene zu liegen kommt. Die Coordinaten des Punktes O seien:

$$x = a, \; y = 0, \; z = c.$$

Wir bezeichnen den von O ausgehenden, verschwindend kleinen Radius vector eines Elementes des Stromes durch ϱ und den Winkel, welchen der Radius vector mit der x-Axe, also auch mit der Durchschnittslinie der Stromfläche und der Ebene xz bildet, durch v. Diesen Winkel rechnen wir von 0 bis 2π und in gleichem Sinne wie wir bisher die Z-Componente eines Gegenpaares gerechnet haben, d. h. in gleichem Sinne mit der Rotation, durch welche die x-Axe auf dem kürzesten Wege um den Coordinatenanfangspunkt in die y-Axe so gedreht wird, dass die in Bezug auf die Vorzeichen einander entsprechenden Hälften beider Axen zusammenfallen. Die Richtungen der positiven x und y mögen aber in der Folge, wo eine solche nähere Bestimmung von Bedeutung ist, stets so gewählt werden, dass jene Rotation für ein Auge, welches sich im Unendlichen auf der Seite der positiven z befindet, mit der Bewegung des Zeigers einer Uhr übereinstimmt. Diese Rotation bezeichnen wir dadurch, dass wir sagen, sie erscheine dem Auge

rechtläufig, während wir von der entgegengesetzten Rotation sagen, sie erscheine dem Auge rückläufig. Wir erhalten nun für ein Element des Elementarstromes, wenn auch die Strömung der positiven Elektricität einem Auge, das auf der Seite der positiven z im Unendlichen liegt, rechtläufig erscheint:

$$x' = a + \varrho \cos v,\ y' = \varrho \sin v,\ z' = c,$$

$$dx' = \cos v\, d\varrho - \varrho \sin v\, dv,\quad dy' = \sin v\, d\varrho + \varrho \cos v\, dv,\quad dz' = 0.$$

Hieraus folgt ferner:

$$A = \int \frac{y'\,dz' - z'\,dy'}{r^3} = -c\int \frac{dy'}{r^3},$$

$$B = \int \frac{z'\,dx' - x'\,dz'}{r^3} = c\int \frac{dx'}{r^3},$$

$$C = \int \frac{x'\,dy' - y'\,dx'}{r^3} = a\int \frac{dy'}{r^3} + \int \frac{\varrho^2\,dv}{r^3}.$$

Wenn t die Entfernung des Punktes O vom Coordinatenanfangspunkte bedeutet, so ist:

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = t^2 + \varrho^2 + 2a\varrho \cos v.$$

Substituiren wir den hieraus sich ergebenden Werth von r in die obigen Ausdrücke, entwickeln die Integranden nach steigenden Potenzen von ϱ und berücksichtigen, dass $\int dx'$ und $\int dy'$ verschwinden, weil der Strom in sich geschlossen ist, so kommt, wenn wir bloss die Glieder der niedrigsten Ordnung beibehalten:

$$\int \frac{dx'}{r^3} = -\frac{3a}{t^5}\int \varrho \cos v\, dx' = -\frac{3a}{2t^5}\int d(\varrho^2 \cos v^2),$$

$$\int \frac{dy'}{r^3} = -\frac{3a}{t^5}\int \varrho \cos v\, dy' = -\frac{3a}{2t^5}\int \{\tfrac{1}{2} d(\varrho^2 \sin 2v) + \varrho^2 dv\},$$

$$\int \frac{\varrho^2\,dv}{r^3} = \frac{1}{t^3}\int \varrho^2\,dv.$$

Hiernach hat man mit Rücksicht auf den Umstand, dass der Strom in sich geschlossen ist, und wenn seine Fläche mit f' bezeichnet wird:

$$A = \frac{3ac}{t^5} f',\ B = 0,\ C = \left(\frac{2}{t^3} - \frac{3a^2}{t^5}\right) f'.$$

Für die gesuchten Componenten der Wirkung, welche der Elementarstrom auf das Stromelement ausübt, findet man nunmehr endlich:

$$\frac{2X}{ii'f'} = \left(\frac{2}{t^3} - \frac{3a^2}{t^5}\right) dy = \frac{d\left(-\frac{c\,dy}{t^3}\right)}{dc},$$

$$\frac{2Y}{ii'f'} = -\left(\frac{2}{t^3} - \frac{3a^2}{t^5}\right) dx + \frac{3ac}{t^5}\, dz = \frac{d\left(\frac{c\,dx - a\,dz}{t^3}\right)}{dc},$$

$$\frac{2Z}{ii'f'} = -\frac{3ac}{t^5}\, dy = \frac{d\left(\frac{a\,dy}{t^3}\right)}{dc}.$$

Aus den letzten Formeln, welche sich auf eine besondere Lage des Stromelementes und des Elementarstromes gegen das Coordinatensystem beziehen, lassen sich leicht die für eine beliebige Lage des Elementes und des Stromes gültigen Formeln wie folgt entwickeln. Man drehe erstlich das oben gewählte Coordinatensystem um die Axe der z, sodann um die Axe der y und hiernach verschiebe man dasselbe, ohne die Richtung seiner Axen zu ändern. Nach jeder Aenderung des Systemes aber leite man mittelst der bekannten Transformationsformeln die neuen Componenten der Kraft aus den alten her und drücke hierauf die alten Coordinaten durch die neuen aus. Auf diese Weise gelangt man zu folgenden Beziehungen. Es seien x, y, z die Coordinaten des Stromelementes, x', y', z' die Coordinaten des Elementarstromes, d. h. die Coordinaten irgend eines Punktes seiner Stromfläche. Die Entfernung des Elementes vom Strome sei r. Ferner werde durch $\frac{d\,..}{dv'}$ eine Differentiation nach der Normale der Stromfläche angedeutet und hierbei unterstellt, dass sich der Differentialquotient auf den Strom, d. h. auf irgend einen Punkt der Stromfläche beziehe, und die Normale von der Seite her, auf welcher der Strom rechtläufig erscheint, nach der Seite hin, auf welcher er rückläufig erscheint, gerechnet werde. Alsdann hat man:

$$\frac{2X}{ii'f'} = -\frac{d\mathrm{A}}{dv'},\quad \frac{2Y}{ii'f'} = -\frac{d\mathrm{B}}{dv'},\quad \frac{2Z}{ii'f'} = -\frac{d\mathrm{C}}{dv'},$$

wo zu setzen ist:

$$A = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} dz - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} dy, \quad B = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} dx - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} dz,$$

$$C = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} dy - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} dx,$$

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

b. Wirkung zwischen einem Stromelemente und einem Solenoïde.

Ein besonderes Interesse bietet die Betrachtung eines starren Systemes von Elementarströmen dar, die unter einander gleich und parallel und überdies in verschwindend kleinen gleichen Abständen von einander so angeordnet sind, dass alle homologen Punkte in geraden Linien liegen, die auf den Ebenen der Ströme senkrecht stehen. Ein solches System wird Solenoïd genannt und ist vollständig bestimmt, sobald die Lage seiner Endpunkte, der einzelne Elementarstrom und die (unendlich grosse) Anzahl der auf die Längeneinheit gehenden Elementarströme gegeben ist. Es seien nun P_1' und P_2' die Enden eines Solenoïdes mit den Coordinaten x_1', y_1', z_1' und x_2', y_2', z_2'. $P_2'P_1'$ sei die Richtung der Normale des einzelnen Elementarstromes, solche in der Weise, wie früher angegeben wurde, gerechnet, und nach dieser Richtung sei ν' die Entfernung des einzelnen Elementarstromes, ν_1' die des Endes P_1', ν_2' die des Endes P_2' von einem beliebig gewählten festen Punkte der Linie $P_2'P_1'$. Ferner werde die Intensität und die Fläche des Elementarstromes durch i' und f' bezeichnet und durch n' die auf die Längeneinheit gehende Anzahl von Strömen. Nach dem Früheren erhalten wir alsdann für die Componenten der Wirkung, welche das Solenoïd auf ein Stromelement ausübt:

$$\frac{2X}{ii'f'} = \int_{\nu_1'}^{\nu_2'} \frac{dA}{dv'} n' dv', \quad \frac{2Y}{ii'f'} = \int_{\nu_1'}^{\nu_2'} \frac{dB}{dv'} n' dv',$$

$$\frac{2Z}{ii'f'} = \int_{\nu_1'}^{\nu_2'} \frac{dC}{dv'} n' dv',$$

oder:

$$\frac{2X}{i.n'i'f'} = A_2 - A_1, \quad \frac{2Y}{i.n'i'f'} = B_2 - B_1, \quad \frac{2Z}{i.n'i'f'} = C_2 - C_1,$$

wo A_1, A_2 u. s. f. die Ausdrücke bedeuten, welche aus A u. s. f. hervorgehen, wenn an die Stelle von x', y', z', bezüglich die Coordinaten des einen oder des andern Endes des Solenoïdes gesetzt werden.

Wenn man das Ende P_1' des Solenoïdes in seiner Lage belässt, dahingegen durch Verlängerung des Solenoïdes das Ende P_2' ins Unendliche rücken lässt, so erhält man ein nur einseitig begrenztes Solenoïd, welches wir ein rechtläufiges nennen wollen, weil der Strom des im Endlichen gelegenen Endes, von dem ins Unendliche gerückten Ende aus betrachtet, als rechtläufig erscheint. Für ein solches unendlich langes Solenoïd ergiebt sich dem Obigen zufolge, wenn wir die Coordinaten des im Endlichen gelegenen Endes durch x', y', z' bezeichnen:

$$\frac{2X}{i.n'i'f'} = -A, \quad \frac{2Y}{i.n'i'f'} = -B, \quad \frac{2Z}{i.n'i'f'} = -C.$$

Die Werthe der Componenten X, Y, Z kehren ihr Vorzeichen um, wenn das Solenoïd in ein rückläufiges übergeht, d. h. wenn sich die Richtung der Elementarströme umkehrt und folglich letztere, von dem im Unendlichen gelegenen Ende her betrachtet, als rückläufig erscheinen.

Legen wir das Element in den Anfangspunkt der Coordinaten und geben wir ihm die Richtung der positiven z, so verschwindet die Componente Z, und für die beiden übrigen Componenten ergiebt sich, wenn das Solenoïd rechtläufig ist:

$$\frac{2X}{i.n'i'f'} = -\frac{y'}{r^3} ds, \quad \frac{2Y}{i.n'i'f'} = \frac{x'}{r^3} ds.$$

Hiernach steht die Kraft, womit das Solenoïd auf das Element einwirkt, nicht bloss auf diesem, sondern auch auf der Verbindungslinie des Elementes und des Solenoïd-Endes P_1', also auch auf der durch diese Linie und das Element bestimmten Ebene senkrecht. Betrachtet man das Solenoïd-Ende von der Stelle des Stromelementes aus und geht die Richtung des letztern oder sein Strom von unten nach oben, so ist die Kraft, welche das Solenoïd auf das Element ausübt, von links nach rechts gerichtet. Die entgegengesetzte Richtung erlangt die Kraft, wenn das Solenoïd rückläufig ist. Was aber die absolute Grösse der Kraft betrifft, so hat man für dieselbe, unter φ den Winkel verstanden, welchen das Element mit der Verbindungslinie des Elementes und des Solenoïd-Endes bildet:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{i.n'i'f'}{2} \cdot \frac{\sin\varphi}{r^2}\, ds.$$

Von der Richtung des Solenoïdes ist die Kraft ganz unabhängig.

c. Wirkung zwischen einem Solenoïde und einem Elementarstrome.

Die elektrodynamische Wirkung eines jeden Solenoïdes kann stets leicht auf die des rechtläufigen Solenoïdes zurückgeführt werden. Wir beschränken uns daher bei Betrachtung der Wirkung zwischen einem Solenoïde und einem Elementarstrome auf den Fall, wo jenes ein rechtläufiges ist. Zur Vereinfachung der Rechnung legen wir den Elementarstrom so in die xy-Ebene, dass der Coordinatenanfangspunkt in die Stromfläche zu liegen kommt. Ferner legen wir die xz-Ebene durch das im Endlichen gelegene Ende des Solenoïdes und bezeichnen die Coordinaten x und z des Endes durch a und c. Wir erhalten alsdann, wenn wir im Uebrigen die frühere Bezeichnung beibehalten, für die Componenten der resultirenden Kraft und des resultirenden Gegenpaares, durch welche sich die Wirkung des Solenoïdes auf den Elementarstrom darstellen lässt, vorausgesetzt, dass derselbe von der positiven z-Axe aus rechtläufig erscheint:

$$\frac{2\mathrm{X}}{i\,.\,n'i'f'} = -\Sigma\mathrm{A} = c\int\frac{dy}{r^3},\ \frac{2\mathrm{Y}}{i\,.\,n'i'f'} = -\Sigma\mathrm{B} = -c\int\frac{dx}{r^3},$$

$$\frac{2\mathrm{Z}}{i\,.\,n'i'f'} = -\Sigma\mathrm{C} = \int\frac{x\,dy - y\,dx}{r^3} - a\int\frac{dy}{r^3},$$

$$\frac{2\Xi}{i\,.\,n'i'f'} = -\Sigma\mathrm{C}y = \int\frac{y(x\,dy - y\,dx)}{r^3} - a\int\frac{y\,dy}{r^3},$$

$$\frac{2\mathrm{H}}{i\,.\,n'i'f'} = \Sigma\mathrm{C}x = -\int\frac{x(x\,dy - y\,dx)}{r^3} + a\int\frac{x\,dy}{r^3},$$

$$\frac{2\mathrm{Z}}{i\,.\,n'i'f'} = \Sigma(\mathrm{A}y - \mathrm{B}x) = -c\int\frac{x\,dx + y\,dy}{r^3}.$$

Zum Behufe weiterer Umformung setzen wir, die Polarcoordinaten ϱ, v einführend und in der Annahme, dass der Elementarstrom in gleichem Sinne fliesst, wie der Winkel v gerechnet wird:

$$x = \varrho\cos v\,,\ y = \varrho\sin v.$$

Ferner bezeichnen wir durch t die Entfernung des Solenoïd-Endes vom Elementarstrome und durch f die Fläche des letzteren. Alsdann kommt, wenn wir die Integranden in den obigen Ausdrücken nach steigenden Potenzen von ϱ entwickeln, nur die Glieder der niedrigsten Dimension in Bezug auf ϱ beibehalten und berücksichtigen, dass einer Summation über sämmtliche Elemente des Stromes eine Integration nach v von 0 bis 2π entspricht:

$$\int\frac{dx}{r^3} = \frac{3a}{2t^5}\int d(\varrho^2\cos v^2) = 0,$$

$$\int\frac{dy}{r^3} = \frac{3a}{2t^5}\int\{\tfrac{1}{2}d(\varrho^2\sin 2v) + \varrho^2\,dv\} = \frac{3a}{t^5}f,$$

$$\int\frac{x\,dy}{r^3} = \frac{1}{2t^3}\int\{\tfrac{1}{2}d(\varrho^2\sin 2v) + \varrho^2\,dv\} = \frac{1}{t^3}f,$$

$$\int\frac{y\,dy}{r^3} = \frac{1}{2t^3}\int d(\varrho^2\sin v^2) = 0,$$

$$\int\frac{x\,dx + y\,dy}{r^3} = \frac{1}{2t^3}\int d(\varrho^2) = 0, \int\frac{x\,dy - y\,dx}{r^3} = \frac{1}{t^3}\int\varrho^2\,dv = \frac{2}{t^3}f,$$

$$\int\frac{x(x\,dy - y\,dx)}{r^3} = \int\frac{y(x\,dy - y\,dx)}{r^3} = 0.$$

Hiernach verschwinden die Componente Y der resultirenden Kraft und die Componenten Ξ und Z des resultirenden Gegenpaares. Für die übrigen Componenten kommt:

$$\frac{2\mathrm{X}}{if\,.\,n'i'f'} = \frac{3ac}{t^5},\ \frac{2\mathrm{Z}}{if\,.\,n'i'f'} = \frac{2}{t^3} - \frac{3a^2}{t^5},\ \frac{2\mathrm{H}}{if\,.\,n'i'f'} = \frac{a}{t^3}.$$

Die Wirkung, welche das Solenoïd auf den Elementarstrom ausübt, lässt sich also durch eine einzige Kraft darstellen. Sie liegt in der Ebene, welche durch das Solenoïd-Ende und die Normale des Stromes bestimmt wird, und geht zudem durch das Solenoïd-Ende, denn es ist:

$$\mathrm{X}c - \mathrm{Z}a = \mathrm{H}.$$

Für die Componenten X und Z der Kraft kann man auch schreiben:

$$\frac{2\mathrm{X}}{if.n'i'f'} = \frac{d\left[\frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{da}\right]}{dc}, \quad \frac{2\mathrm{Z}}{if.n'i'f'} = \frac{d\left[\frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dc}\right]}{dc}.$$

Wenn sowohl der Strom, als auch das Solenoïd eine beliebige Lage gegen das Coordinatensystem einnimmt, so erhält man durch Verallgemeinerung der oben gewonnenen Resultate für die Componenten der Kraft, welche das Solenoïd auf den Strom ausübt, folgende Ausdrücke, in welchen durch x, y, z die Coordinaten des Stromes, durch x', y', z' die Coordinaten des Solenoïd-Endes bezeichnet sind, und durch $\frac{d\,.\,.}{dv}$ eine Differentiation nach der Normale der Stromfläche angedeutet ist:

$$\frac{2\mathrm{X}}{if.n'i'f'} = -\frac{dL}{dv}, \quad \frac{2\mathrm{Y}}{if.n'i'f'} = -\frac{dM}{dv}, \quad \frac{2\mathrm{Z}}{if.n'i'f'} = -\frac{dN}{dv},$$

wo zu setzen ist:

$$L = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx}, \quad M = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy}, \quad N = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz},$$

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

d. Wechselwirkung zwischen zwei Solenoïden.

Die Wirkung, welche ein einseitig begrenztes Solenoïd auf einen einzelnen Elementarstrom ausübt, wird durch eine Kraft dargestellt, welche durch das im Endlichen gelegene Ende des Solenoïdes geht. Es wird daher offenbar auch die Wirkung, welche ein solches Solenoïd auf ein zweites einseitig begrenztes Solenoïd ausübt, durch eine Kraft dargestellt werden, die durch das Ende des ersten Solenoïdes geht, indem jene Wirkung sich

aus den Wirkungen zusammensetzt, welche das erste Solenoïd auf die einzelnen Ströme des zweiten Solenoïdes ausübt. Es seien nun i, f, n und i', f', n' die Constanten zweier rechtläufiger Solenoïde P und P'. Ferner sei v die Entfernung des einzelnen Stromes in P von einem beliebig gewählten festen Punkte des Solenoïdes, v_1 dieselbe Entfernung für die im Endlichen gelegene Endfläche, und jene Entfernungen mögen nach der Richtung der Normalen der Elementarströme gerechnet werden. Alsdann ergiebt sich nach dem Früheren für die Componenten X, Y, Z der durch das Ende von P' gehenden Kraft, welche dieses Solenoïd auf P ausübt:

$$\frac{2X}{if.n'i'f'} = -\int_{\infty}^{v_1} \frac{dL}{dv} n\,dv, \quad \frac{2Y}{if.n'i'f'} = -\int_{\infty}^{v_1} \frac{dM}{dv} n\,dv,$$

$$\frac{2Z}{if.n'i'f'} = -\int_{\infty}^{v_1} \frac{dN}{dv} n\,dv,$$

wo in den Ausdrücken L, M, N für r die Entfernung des Elementarstromes in P vom Ende des Solenoïdes P' zu setzen ist. Die Ausrechnung liefert, wenn wir die Coordinaten der Endflächen der Solenoïde bezüglich durch x, y, z und x', y', z' bezeichnen und nunmehr unter r die Entfernung jener Enden verstehen:

$$\frac{2X}{nif.n'i'f'} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}, \quad \frac{2Y}{nif.n'i'f'} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'},$$

$$\frac{2Z}{nif.n'i'f'} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'}.$$

Gleiche Ausdrücke ergeben sich, wenn die Solenoïde beide rückläufig sind. Bei zwei ungleichnamigen oder ungleichläufigen Solenoïden aber erlangen die Ausdrücke für die Componenten das entgegengesetzte Vorzeichen.

Aus den gewonnenen Resultaten folgt, dass die Wechselwirkung zwischen zwei einseitig begrenzten Solenoïden mit den Constanten i, f, n und i', f', n' genau dieselbe ist, wie zwi-

schen zwei Magnetpolen, welche in den Enden der Solenoïde liegen und gleichnamig oder ungleichnamig sind, jenachdem die Solenoïde gleichläufig oder ungleichläufig sind, und deren absolute magnetische Quanta beziehungsweise durch die Ausdrücke $\frac{nif}{\sqrt{2}}$ und $\frac{n'i'f'}{\sqrt{2}}$ dargestellt werden. Bei der hierdurch begründeten Darstellung der Wechselwirkung zwischen Solenoïden durch die Wechselwirkung von Polen, bleibt es der Willkür anheim gegeben, ob man das rechtläufige Solenoïd durch einen Nord- oder Südpol ersetze. Wir wollen aber stets im Hinblick auf die später zu erörternden elektromagnetischen Phänomene das rechtläufige Solenoïd durch einen Nordpol und dem entsprechend das rückläufige Solenoïd durch einen Südpol ersetzen. Bei dieser Annahme lässt sich das Solenoïd von endlicher Länge durch ein Paar entgegengesetzt gleicher Pole ersetzen, von welchen der Nordpol in derjenigen Endfläche liegt, von woher betrachtet die einzelnen Ströme als rückläufig erscheinen, während der Südpol in der andern Endfläche liegt. Der absolute Werth des in einem Pole concentrirten magnetischen Quantums ist gleich $\frac{nif}{\sqrt{2}}$, oder, wenn ε der Abstand zweier benachbarter Elementarströme ist, gleich $\frac{if}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$.

Belegt man diejenige Endfläche eines Solenoïdes, für welche die Ströme als rückläufig erscheinen, gleichförmig mit nördlich-magnetischem Fluidum von der Dichtigkeit $\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{ni}{\sqrt{2}}$, die zweite Endfläche mit südlich-magnetischem Fluidum von gleicher absoluter Dichte, so stimmt die Wechselwirkung zwischen diesen Belegungen und den analogen Belegungen eines zweiten Solenoïdes vollständig mit der elektrodynamischen Wechselwirkung der beiden Solenoïde überein. Hieraus folgt, dass bei der Bestimmung der Wechselwirkung zwischen Elementarströmen, welche als Solenoide von verschwindend kleinen Längen angesehen werden können, der einzelne Strom ersetzt werden darf durch eine ebene vom Strom begrenzte Scheibe von verschwindend kleiner Dicke ε, welche auf der einen

Seite gleichförmig mit nördlichem, auf der andern Seite gleichförmig mit südlichem Fluidum von der absoluten Dichtigkeit $\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$ belegt ist, und zwar ist hierbei diejenige Seite mit nördlichem Fluidum zu belegen, von welcher aus der Strom rückläufig erscheint. Auch kann der Elementarstrom ersetzt werden durch eine verschwindend kleine Magnetnadel, die in der Normale des Stromes liegt, so zwar, dass die Richtung ihrer magnetischen Axe mit der Richtung der Normale übereinstimmt, und deren Moment gleich $\frac{if}{\sqrt{2}}$ ist. Das Solenoïd kann auch ersetzt werden durch die Säule der transversal-magnetischen Scheiben, welche den einzelnen Elementarströmen entsprechen und für deren Dicke man $\frac{1}{n}$ nehmen kann, so dass sich je zwei aufeinanderfolgende Scheiben mit ungleichnamigen Belegungen berühren und nur die äusseren Belegungen der beiden äussersten Scheiben zur Geltung kommen.

e. Zurückführung der Wechselwirkung zwischen linearen elektrischen Strömen auf die Wechselwirkung zwischen transversal-magnetischen Flächen.

Die elektrodynamische Wirkung eines in sich geschlossenen elektrischen Stromes kann stets ersetzt werden durch die eines Systems von Elementarströmen, deren Flächen in ihrer Gesammtheit ein stetiges von der Stromcurve begrenztes Flächenstück bilden. In der That, man denke sich eine solche Fläche und zerlege sie in ebene Elemente; jedes dieser Elemente denke man sich von einem Strome umflossen, der an Intensität dem ursprünglichen Strome gleichkommt, so zwar, dass in den Randelementen die Elementarströme, wo sie mit dem ursprünglichen Strome zusammenfallen, auch mit diesem gleich gerichtet sind. Es leuchtet alsdann ein, dass das so gewonnene System von Elementarströmen dieselbe elektrodynamische Wirkung wie der ursprüngliche Strom äussert. In den Linien-Elementen nämlich, welche zwei benachbarten Elementarströmen gemein sind, fliessen die Ströme nach entgegengesetzten Richtungen; daher reducirt sich die Wirkung des ganzen Sy-

stems auf die Wirkung der am Rande gelegenen Stromelemente, welche in ihrer Gesammtheit einen dem ursprünglichen Strome gleichen Strom ausmachen.

Aus dem Obigen folgt, dass sich die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Strömen auf die Wechselwirkung zwischen zwei transversal-magnetischen Flächen zurückführen lasse. Ersetzt man nämlich die Elementarströme, welche für einen Strom gesetzt werden können, durch ebene transversal-magnetische Scheiben von gleicher, verschwindend kleiner Dicke, so bilden alle diese Scheiben eine transversal-magnetische Fläche von constanter Dicke, welche auf der einen Seite mit nördlichem, auf der andern Seite mit südlichem Fluidum gleichförmig belegt ist. Die absolute Dichtigkeit der Belegungen ist $\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$, wenn i die Intensität des Stromes und ε die Dicke der Fläche oder den Abstand der Belegungen bedeutet.

Wenn die soeben gemachte Bemerkung auf die Ermittelung der Wirkung zwischen einem elektrischen Strome und einem zweiten Strome oder einem Solenoïde angewandt werden soll, so muss vor Allem das Potential einer der transversal-magnetischen Scheiben, welche für den Strom gesetzt werden können, gesucht werden. Es sei dF das Element einer solchen Fläche, r seine Entfernung von einem beliebigen Punkte O. Ferner werde durch $\frac{d..}{d\nu}$ eine Differentiation nach der Normale des Elementes angedeutet, solche in der Richtung der magnetischen Axe des Elementes gerechnet. Die Intensität des Stromes, für welchen die Fläche gesetzt wird, sei i. Alsdann hat man offenbar für das Potential der Fläche in Bezug auf den Punkt O:

$$V = \frac{i}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\nu} dF,$$

oder, wenn der Winkel, welchen der von O ausgehende Leitstrahl r mit der magnetischen Axe des Elementes dF bildet, durch δ bezeichnet wird:

$$V = -\frac{i}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos\delta}{r^2} dF.$$

Der absolute Werth des Integrales kann als Inhalt der Fläche aufgefasst werden, welche aus einer Kugelfläche mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkte O von derjenigen Kegelfläche herausgeschnitten wird, welche in O ihre Spitze hat und durch den Rand der Fläche oder die Stromcurve geht. Diese Bemerkung ist von Nutzen, um den allgemeinen Verlauf des Potentiales einer transversal-magnetischen Fläche zu untersuchen. Hierüber lassen sich folgende Sätze aufstellen.

Alle Niveauflächen des Potentiales gehen durch den Rand der Fläche, so dass hier das Potential keinen bestimmten Werth aufweist. Unter ihnen tritt eine ins Unendliche sich erstreckende Fläche mit dem Potentialwerthe 0 auf, welche in Gemeinschaft mit der magnetischen Fläche selbst den Raum, in welchem das Potential positiv ist, von dem Raume, in welchem es negativ ist, trennt.

Die Kraftlinien sind im Allgemeinen in sich geschlossene Curven, von welchen eine jede die magnetische Fläche in einer ungeraden Anzahl von Punkten schneidet. Nähert man sich dem Rande der Fläche, so ziehen sich die Kraftlinien schliesslich zu verschwindend kleinen Kreisen zusammen, die in der Normalebene der Randcurve liegen, und deren Mittelpunkte in letztere fallen. Die Richtung der Kraft in einem Punkte der Randcurve ist also nur insofern bestimmt, als sie auf der Curve senkrecht stehen muss. Die Grösse der Kraft ändert sich stetig, wenn man stetig fortschreitet; in der Randcurve wird sie unendlich gross.

Das Potential ändert sich stetig, wenn der Punkt, auf welchen es sich bezieht, eine stetige Linie beschreibt, ohne durch die magnetische Fläche hindurchzugehen. Tritt aber der Punkt von der einen Seite der Fläche durch letztere hindurch auf die andere Seite über, so zeigt hierbei das Potential eine Unterbrechung der Stetigkeit, und zwar ist der Betrag der plötzlichen Aenderung des Potentiales gleich $\pm 4\pi \frac{i}{\sqrt{2}}$, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem der Punkt in der Richtung der magnetischen Axe an der betreffenden Stelle oder in entgegengesetzter Richtung durch die Fläche hindurchgeht.

Wenn eine Niveaufläche ausser in der Randcurve auch noch anderweitig von der magnetischen Fläche geschnitten wird, so weist das Potential in den hierdurch entstehenden verschiedenen Theilen der Niveaufläche Werthe auf, welche sich um ganze Vielfache von $\pm 4\pi \frac{i}{\sqrt{2}}$ von einander unterscheiden.

Die Potentiale aller stetigen transversal-magnetischen Flächen mit derselben Randcurve liefern ein und dasselbe System von Gleichgewichtsflächen und Kraftlinien, können aber in ein und demselben Punkte verschiedene Werthe aufweisen. Für zwei solcher Flächen werden die Potentiale gleich in allen Punkten, welche ausserhalb des von beiden Flächen umschlossenen Raumes liegen. In einem Punkte des letzt genannten Raumes unterscheiden sich die Potentiale um ein ganzes Vielfaches von $\pm 4\pi \frac{i}{\sqrt{2}}$.

Die Function der Coordinaten des Centrums der r, welche das Potential

$$V = -\frac{i}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos\delta}{r^2} dF$$

einer bestimmten transversal-magnetischen Fläche darstellt, stellt auch die Potentiale aller übrigen transversal-magnetischen Flächen dar, welche für den Strom i gesetzt werden können. Man nennt dieselbe das elektromagnetische Potential des Stromes. Sie ist nach dem Vorhergehenden mehrdeutig, und zwar unterscheiden sich die einem beliebigen Punkte des Raumes entsprechenden unendlich vielen Werthe um ganze Vielfache von $\pm 4\pi \frac{i}{\sqrt{2}}$. Ueber die Wahl dieser Werthe machen wir aber die Unterstellung, dass für eine stetige Folge von Punkten auch immer eine Folge von Potentialwerthen genommen werde, welche keine Unterbrechung der Stetigkeit zeigt. Alsdann wird die Aenderung, welche das Potential erleidet, wenn das Centrum der r sich stetig bewegt, durch die Differenz $V_2 - V_1$ der Potentialwerthe V_1 und V_2 für bezüglich den Anfangs- und Endpunkt der Bahn dargestellt. Wenn sich ins Be-

sondere jenes Centrum einmal, zweimal u. s. f. so in einer in sich geschlossenen Bahn um den Rheophor herumbewegt, dass es sämmtliche Niveauflächen nach und nach einmal, zweimal u. s. f. schneidet, so beträgt die Aenderung, welche das Potential hierbei erleidet, je nach dem Sinne der Bewegung $\pm 4\pi \frac{i}{\sqrt{2}}$, $\pm 8\pi \frac{i}{\sqrt{2}}$ u. s. f. Bewegt sich aber das Centrum auf einer in sich selbst zurücklaufenden Bahn, welche nicht alle Niveauflächen schneidet, so erlangt das Potential nach jedem Umlauf denselben Werth wie im Anfange.

Die allgemeinen Verhältnisse des elektromagnetischen Potentiales eines Stromes mögen hier an dem Beispiele des nach beiden Seiten hin unbegrenzten geradlinigen Stromes erläutert werden. Wir legen den Strom in die z-Axe, so zwar, dass seine Richtung mit der der positiven z übereinstimmt, und fassen ihn auf als einen in der xz-Ebene gelegenen Kreisstrom, dessen Mittelpunkt in der Richtung der negativen x ins Unendliche gerückt ist. Unter Anderm kann er dann ersetzt werden durch eine ebene transversal-magnetische Scheibe, welche die ganze auf der negativen Seite der x-Axe gelegene Hälfte der xz-Ebene bedeckt, und in welcher die magnetische Axe allenthalben die Richtung der positiven y hat. Für das Potential dieser Fläche in Bezug auf einen Punkt O mit den Coordinaten x, y, z erhalten wir, unter i die Intensität des Stromes verstanden:

$$V = \frac{i}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{0} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{y}{\{(x'-x)^2 + y^2 + (z'-z)^2\}^{3/2}}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot 2 \, arc\,tang \, \frac{y}{x} \, .$$

Es ist aber für *arc tang* derjenige zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegene Bogen zu nehmen, dessen Sinus und Cosinus in Bezug auf das Vorzeichen beziehungsweise mit y und x übereinstimmt. Diese nähere Bestimmung fällt fort, wenn es sich um das elektromagnetische Potential des Stromes handelt. Für letzteres können wir daher auch schreiben, unter φ den Winkel verstan-

den, welchen eine durch O und den Strom gelegte Ebene mit der xz-Ebene bildet, und diesen Winkel in gleichem Sinne wie die Z-Componente eines Gegenpaares gerechnet:

$$V = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot 2\varphi.$$

Man bemerke, dass die über die Ebene des Stromes gemachte Annahme eine willkürliche ist. Daher kann auch in dem elektromagnetischen Potentiale des Stromes das Anfangs-Azimuth des Winkels φ willkürlich gewählt werden.

Aus dem gefundenen Potentiale ergiebt sich, dass jede durch den Strom gelegte Ebene eine Niveaufläche ist, und dass daher die Kraftlinien Kreise sind, deren Ebenen auf dem Strome senkrecht stehen, und deren Mittelpunkte in den Strom fallen, was auch leicht aus den Differentialgleichungen jener Linien gefunden werden kann. Was die Richtung der Kraft in einem Punkte O betrifft, so geht dieselbe von rechts nach links, wenn man den Punkt vom Strome aus betrachtet und der letztere von unten nach oben steigt. Für die absolute Grösse der Kraft endlich hat man, unter D die Entfernung des Punktes O vom Strome verstanden:

$$\sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2} = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{D}.$$

Es möge hier auch noch das elektromagnetische Potential einer elektrischen Schraubenlinie oder Spirale ermittelt werden, weil diese Form des elektrischen Stromes häufig Anwendung findet. Die Windungen des sehr dünnen Rheophores seien gleichmässig und enge aneinander über eine cylindrische Fläche so gewickelt, dass die einzelne Windung nahezu in einen senkrechten Querschnitt fällt. Der Theil des Stromes, welcher neben der Spirale vorhanden ist, werde ausser Acht gelassen. Man denke sich nun den Cylinder, auf welchen die Spirale gewickelt ist, durch eben so viele gleich weit von einander entfernte Ebenen, als Windungen vorhanden sind, senkrecht geschnitten und jeden der so gewonnenen Querschnitte von einem Strome umflossen, der in Richtung und Intensität mit dem schraubenförmigen Strome übereinstimmt. Annähernd wird es gestattet sein, dieses System von Strömen für die elektrische

Spirale zu setzen und so zu behandeln, als ob die Anzahl der auf die Längeneinheit gehenden Ströme unendlich gross wäre. Es werde jene Anzahl durch n bezeichnet und die Intensität durch i. Ferner sei S diejenige Endfläche der Spirale oder des Cylinders, von welcher aus betrachtet die Strömung in der einzelnen Windung als rechtläufig erscheint, und N sei die andere Endfläche.

Ueber die Wirkung des Stromsystems in dem Raume, welcher ausserhalb des von den Flächen N und S begrenzten Cylinderstückes liegt, lassen sich ganz analoge Betrachtungen wie beim Solenoïde anstellen. Man findet sofort, dass sie sich auf die magnetische Wirkung einer gleichförmigen nördlich-magnetischen Belegung der Fläche N und einer südlich-magnetischen Belegung der Fläche S von der absoluten Dichtigkeit $\frac{ni}{\sqrt{2}}$ zurückführen lasse. Bezeichnen wir also durch V_N und V_S die Potentiale jener Flächen, solche mit magnetischer Flüssigkeit von der Dichtigkeit Eins belegt gedacht, so wird die Wirkung der elektrischen Spirale im äusseren Raume durch folgende Potentialfunction bestimmt:

$$V = \frac{ni}{\sqrt{2}} (V_N - V_S).$$

Es seien nun ferner N' und S' zwei einander unendlich nahe Querschnitte der Spirale, von welchen jener der Endfläche S, dieser der Endfläche N zunächst liege. Man belege N' mit nördlichem, S' mit südlichem Fluidum, dessen absolute Dichtigkeit dieselbe, wie auf den Endflächen ist. Offenbar lässt sich alsdann nach dem Vorhergehenden die Wirkung der Spirale im inneren Raume zwischen N' und S' auf die magnetische Wirkung der Belegungen von N, S, N', S' zurückführen. Bezeichnen wir aber durch $V_{N'}$, $V_{S'}$ die Potentiale der Flächen N' und S' für eine Belegung von der Dichte Eins und durch ν und σ die Normalen jener Flächen, so ist nach einem bekannten Satze:

$$\frac{dV_{N'}}{d\nu} = \frac{dV_{S'}}{d\sigma} = -2\pi.$$

Hiernach entspricht den Belegungen von N' und S' in dem

zwischen ihnen gelegenen Raume eine mit den Seiten des Cylinders parallele, in der Richtung von N' nach S' wirkende Kraft 4π. Wenn wir also durch x die Entfernung vom mittleren Querschnitte der Spirale bezeichnen und sie in der Richtung von S nach N rechnen, so lässt sich die Wirkung derselben im inneren Raume mittelst der folgenden Potentialfunction darstellen:

$$\mathrm{V}' = \frac{ni}{\sqrt{2}}(V_N - V_S - 4\pi x).$$

Die Derivationen der Functionen V und V' nach den Coordinaten stimmen in den Endflächen der Spirale mit einander überein, die Werthe der Functionen selbst aber unterscheiden sich von einander um $\pm \frac{ni}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi l$, wenn l den Abstand der Endflächen von einander bezeichnet. Wenn daher der Punkt, auf welchen sich das elektromagnetische Potential der Spirale beziehen soll, beispielsweise aus dem inneren Raume durch die Endfläche N in den äusseren Raum tritt, und wenn man in dem ersten Raume für das Potential die Function V' nimmt, so hat man im äusseren Raume $\mathrm{V} - \frac{ni}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi l$ zu nehmen. Bewegt sich der Punkt aus dem inneren Raume durch die Endfläche N in den äusseren und hierauf wiederum durch S in den inneren Raum, so hat man für das Potential in den drei durchlaufenen Räumen der Reihe nach zu nehmen:

$$\mathrm{V}', \ \mathrm{V} - \frac{ni}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi l, \ \mathrm{V}' - \frac{ni}{\sqrt{2}} \cdot 4\pi l.$$

Gewöhnlich ist der Querschnitt der elektrischen Spiralen kreisförmig. Alsdann können die Potentiale V_N und V_S leicht wie folgt gefunden werden. Es sei R der Radius, V das Potential einer Kreisfläche, die gleichförmig mit magnetischer Flüssigkeit von der Dichte Eins bedeckt ist, in Bezug auf den Punkt O. Dieser sei um u von der Kreisfläche und seine Projection O' auf letzterer um t vom Mittelpunkte entfernt. Wenn nun erstlich O' ausserhalb des Kreises liegt, so ziehe man von O' aus eine Secante, bezeichne durch r_1 das kleinere, durch r_2 das grössere der Segmente, welche auf ihr durch den Kreis bestimmt werden,

und durch φ den Winkel, welchen sie mit der Verbindungslinie der Projection und des Mittelpunktes bildet. Endlich werde noch durch φ' derselbe Winkel für den Fall, dass die Secante in eine Tangente übergeht, bezeichnet. Alsdann hat man:

$$1.)\ V = 2\int_0^{\varphi'} \left(\sqrt{r_2^2+u^2} - \sqrt{r_1^2+u^2}\right) d\varphi,$$

wo zu setzen ist:

$$r_1 = t\cos\varphi - \sqrt{R^2 - t^2 \sin\varphi^2},\quad r_2 = t\cos\varphi + \sqrt{R^2 - t^2\sin\varphi^2}.$$

Wenn zweitens die Projection O' in die Kreisfläche fällt, so kommt:

$$2.)\ V = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2+u^2}\, d\varphi - 2\pi u.$$

Hier bedeutet r den von O' nach dem Umfange des Kreises gezogenen Leitstrahl und φ den Winkel, welchen derselbe mit der Verbindungslinie der Projection und des Mittelpunktes bildet, so dass zu setzen ist:

$$r = \sqrt{R^2 - t^2\sin\varphi^2} - t\cos\varphi.$$

Es erübrigt noch, die Beziehung zwischen den elektromagnetischen Potentialen zweier Ströme und dem Potentiale der Ströme auf einander zu berühren. Nach den obigen Entwicklungen muss das letztere mit dem negativ genommenen elektromagnetischen Potentiale des einen Stromes in Bezug auf die magnetischen Quanta irgend einer der Flächen, welche für den anderen Strom gesetzt werden können, zusammenfallen. In der That lässt sich dies leicht direct durch die Betrachtung von Elementarströmen beweisen. Bezeichnen wir also durch V, V' die elektromagnetischen Potentiale zweier Ströme mit den Intensitäten i, i', durch F, F' zwei der Flächen, welche für die Ströme gesetzt werden können, ferner durch $\frac{d\,..}{dv}$, $\frac{d\,..}{dv'}$ Differentiationen nach den Axen ihrer Elemente und endlich durch W das Potential der Ströme in Bezug aufeinander, so ist:

$$W = -\frac{i'}{\sqrt{2}}\int \frac{dV}{dv'}\,dF' = -\frac{i}{\sqrt{2}}\int \frac{dV'}{dv}\,dF.$$

Man hat auch, unter r die Verbindungslinie der Elemente dF, dF', unter δ, δ' die Winkel, welche r mit den Axen der Elemente bildet, und unter Δ den Winkel, welchen diese Axen mit einander bilden, verstanden:

$$W = -\frac{ii'}{2}\int\int\frac{\cos\Delta - 3\cos\delta\cos\delta'}{r^3}\,dF\,dF'.$$

Dabei ist der Radius vector r stets in derselben Richtung, entweder von dF nach dF', oder umgekehrt, zu nehmen.

II.

VOM ELEKTROMAGNETISMUS.

II.

VOM ELEKTROMAGNETISMUS.

1. Ampère's Hypothese vom Wesen des Magnetismus.

Die Wechselwirkung zwischen zwei Elementarströmen bietet, wie wir sahen, eine vollkommene Analogie mit der Wechselwirkung zweier magnetisirter Körperelemente dar, und zwar entsprechen den magnetischen Axen der Elemente die Normalen der Ströme, und den magnetischen Momenten der Elemente die durch $\sqrt{2}$ dividirten Producte aus den Intensitäten und Flächen der Ströme. Hieraus folgt, dass alle rein magnetischen Erscheinungen, welche sich durch die Coulomb'sche Annahme magnetischer Flüssigkeiten erklären lassen, ebenmässig aus der elektrodynamischen Wirkung von Elementarströmen, welche die kleinsten Theilchen der magnetisch erregten Körper umkreisen, hergeleitet werden können. In dem Auftreten solcher Molecularströme hat Ampère den nächsten Grund des Magnetismus gesucht. Es führt aber diese Hypothese nicht bloss die rein magnetischen Erscheinungen auf die Gesetze der Elektrodynamik zurück, sondern sie verknüpft auch aufs Engste mit jenen beiden Gebieten die ganze Gruppe von Erscheinungen, welche sich auf die Wechselwirkung zwischen elektrischen Strömen und permanenten Magneten, sowie auf die Erzeugung des Magne-

tismus durch den elektrischen Strom beziehen und unter der Benennung der elektromagnetischen Erscheinungen zusammengefasst werden. Diese Phänomene bilden den Gegenstand für die nächstfolgenden Betrachtungen.

2. Von der Wirkung zwischen einem linearen elektrischen Strome und einem permanenten Magneten, sowie von der Induction des Magnetismus durch einen linearen elektrischen Strom.

Die theoretischen Formeln, welche sich aus der Ampère-schen Hypothese vom Wesen des Magnetismus für die Wechselwirkung zwischen elektrischen Strömen und permanenten Magneten ergeben, können nach den Resultaten zahlreicher Beobachtungen als genauer Ausdruck der Wirklichkeit angesehen werden. Wir begnügen uns damit, beispielsweise einen der einfachsten hierher gehörenden Fälle zu berühren.

Wenn man ein einseitig begrenztes Solenoïd in die Wirkungssphäre eines geradlinigen, nach beiden Seiten hin unbegrenzten Stromes bringt, so erleidet es eine Einwirkung, welche sich durch eine einzige Kraft darstellt. Die Kraft geht durch das im Endlichen gelegene Ende des Solenoïdes und ist bei einem rechtläufigen Solenoïde von rechts nach links gerichtet, wenn man das Solenoïd-Ende vom Strome aus betrachtet, und wenn letzterer von unten nach oben steigt. Unter übrigens gleichen Umständen ist ferner die Kraft mit der reciproken Entfernung des Solenoïd-Endes vom Strome proportional. Diese Gesetze müssen sich der Ampère'schen Hypothese zufolge auf die Wirkung zwischen einem nach beiden Seiten hin unbegrenzten Strome und einem Magnetpole übertragen, wobei es jedoch der Natur der Sache nach von vornherein unentschieden bleibt, ob dem rechtläufigen Solenoïde ein Nord- oder ein Südpol entspreche. In der That kann nun erstlich aus den Versuchen Oersted's, welche den Ausgangspunkt unserer Kenntnisse

vom Elektromagnetismus bilden, geschlossen werden, dass ein solcher Strom auf einen Magnetpol eine Kraft ausübt, welche die oben näher bezeichnete Richtung hat, wenn dem Nordpole ein rechtläufiges, dem Südpole ein rückläufiges Solenoïd entspricht. Wenn man nämlich eine sehr kleine um ihren Mittelpunkt drehbare Magnetnadel der Mitte eines verhältnissmässig langen, geradlinigen Stromstückes nähert, so findet nach jenen Versuchen nur dann Gleichgewicht statt, wenn die magnetische Axe der Nadel auf der durch das Stromstück und die Mitte der Nadel bestimmten Ebene senkrecht steht, hierbei unterstellt, dass die Wirkung des Erdmagnetismus gegen die des Stromes verschwinde. Betrachtet man die Nadel vom Strome aus, und steigt letzterer von unten nach oben, so ist das Gleichgewicht labil, wenn die Nordhälfte der Nadel zur Rechten liegt, dahingegen ist es stabil, wenn die Nordhälfte zur Linken liegt. Aus jeder anderen Lage strebt die Nadel auf dem kürzesten Wege in die Lage des stabilen Gleichgewichtes zu gelangen. Was die Grösse der Kraft betrifft, welche ein beiderseits unbegrenzter geradliniger Strom auf einen einzelnen Magnetpol ausübt, so ist sie nach den Versuchen von Biot und Savart (Précis élementaire de physique expérimentale par Biot) wirklich mit der reciproken Entfernung des Poles vom Strome proportional. Zu diesem Resultate gelangten die genannten Forscher wie folgt. Sie brachten eine horizontal schwingende Magnetnadel in den Wirkungskreis eines verhältnissmässig langen, geradlinigen und verticalen Rheophores und bestimmten, nachdem sie die Wirkung des Erdmagnetismus mittelst eines Magnetstabes neutralisirt hatten, die Dauer der Oscillationen, welche die Nadel in verschiedenen Abständen vom Stromleiter um ihre Gleichgewichtslage herum ausführte. Die Nadel hatte eine parallelepipedische Gestalt und war 2^{cm} lang, 1^{cm} breit und $0{,}1^{cm}$ dick. Sie hing an einem Coconfaden so, dass ihre mittlere geometrische Axe senkrecht stand, und blieb bei den verschiedenen Versuchen in einer und derselben, von beiden Enden des geradlinigen Stromstückes gleichweit entfernten Horizontalebene. Die Entfernung der beiden Pole von einander, durch welche die Magnetnadel annähernd ersetzt werden konnte, war als verschwindend klein gegen die in Betracht kommenden Entfernun-

gen anzusehen, wie aus dem Isochronismus der Schwingungen in kleineren Abständen vom Stromleiter hervorging. Auch waren die Entfernungen der Nadel vom Strome stets klein im Vergleich mit den Entfernungen der Enden des geradlinigen Rheophores und der übrigen Theile des Stromes. Unter diesen Umständen konnte der Strom als ein geradliniger, nach beiden Seiten hin unbegrenzter Strom und die Kraft, welche er auf einen Pol der Nadel ausübte, als umgekehrt proportional mit dem Quadrate der Oscillationsdauer angesehen werden. Biot und Savart gewannen nun in einer Reihe aufeinander folgender Versuche die in der folgenden Tabelle aufgeführten Resultate. Die Entfernung des Rheophores vom Mittelpunkte der Nadel ist durch D, die Dauer einer ganzen Oscillation durch T bezeichnet.

D	T	D	T
3	8,45	3	8,45
4	9,77	6	11,35
3	8,40	3	8,35
2	6,70	12	17,80
3	8,20	3	8,50
5	10,95	1,5	6,00
3	8,45	3	8,63

Die Versuche sind so angeordnet, dass jedesmal zwei Bestimmungen für die Distanz 3 eine Bestimmung für die übrigen Distanzen 4, 2 u. s. f. einschliessen. Indem man das arithmetische Mittel jener beiden Werthe mit dem eingeschlossenen Werthe verbindet, eliminirt man zum Theil den störenden Einfluss, welchen die Unbeständigkeit des Stromes ausübte. Es sei nun T' die so gewonnene Oscillationsdauer für die Distanz 3 und T dieselbe Grösse für die andere Distanz D. Alsdann müssen nach dem zu verificirenden Gesetze die Quotienten $D:3$ und $T'^2:T^2$ einander gleich sein. Dies ist wirklich annähernd der Fall, wie aus der folgenden Tabelle erhellt. Die Differenzen lassen sich

sehr wohl aus den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern und ins Besondere aus dem Schwanken der Stromintensität erklären.

$D:3$	$T'^2:T^2$	$D:3$	$T'^2:T^2$
1,333	1,345	2,000	1,826
0,666	0,652	4,000	4,464
1,666	1,730	0,500	0,491

Die Kenntniss der Gesetze, nach welchen ein elektrischer Strom auf einen Magnetpol einwirkt, setzt uns in den Stand, die Intensitäten elektrischer Ströme mittelst der mechanischen Wirkung, welche sie auf permanente Magnete ausüben, nicht allein mit einander zu vergleichen, sondern auch auf absolutes Maass zurückzuführen. Von den Instrumenten, welche wir zur Ausführung solcher Messungen besitzen, möge hier die Tangentenboussole und der Tangentenmultiplicator näher erörtert werden.

Die Tangentenboussole besteht aus einem kreisförmigen, vertical stehenden, offenen Leiter und einer verhältnissmässig kleinen, horizontal schwingenden Magnetnadel, deren Mittelpunkt auf der Axe des Leiters liegt. Beim Gebrauche wird die Ebene des Leiters mit dem magnetischen Meridiane parallel gestellt und das Instrument in eine galvanische Leitung so eingeschaltet, dass nur der in dem kreisförmigen Leiter fliessende Theil des Stromes eine merkliche Wirkung auf die Magnetnadel ausüben kann. Es äussert sich aber die Wirkung des kreisförmigen Stromes dadurch, dass die Magnetnadel aus dem magnetischen Meridiane heraus in eine neue Gleichgewichtslage getrieben wird, und aus der Grösse dieser Ablenkung kann auf die Intensität des Stromes geschlossen werden, wie aus den folgenden Betrachtungen erhellen wird.

Man lege den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems in den Mittelpunkt des Kreisstromes, die positive Hälfte der x-Axe durch die Mitte der Nadel und die positive

Hälfte der z-Axe senkrecht, der Richtung der Schwerkraft entgegen. In diesem Systeme seien, unter u den Abstand zwischen dem Centrum der Nadel und dem Centrum des Stromes verstanden, $u + \xi$ und η die horizontalen Coordinaten eines Punktes der xy-Ebene, welcher auf der Seite der positiven x liegt. In Bezug auf diesen Punkt sei V das Potential der Kreisfläche, solche mit magnetischer Flüssigkeit von der Dichte Eins belegt gedacht. Alsdann hat man:

$$V = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2 + (u+\xi)^2}\, d\varphi - 2\pi(u+\xi),$$

wo, unter R den Radius des Kreisstromes verstanden, zu setzen ist:

$$r = \sqrt{R^2 - \eta^2 \sin\varphi^2} - \eta \cos\varphi.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich:

$$r^2 = R^2 - 2R\cos\varphi\,.\,\eta + \cos 2\varphi\,.\,\eta^2 + \frac{\sin\varphi^2\cos\varphi}{R}\,.\,\eta^3 + \cdots.$$

Substituirt man diese Entwicklung in den Ausdruck für V und entwickelt den Integranden in eine nach steigenden Dimensionen von ξ und η fortschreitende Reihe, so erhält man nach Ausführung der Integration:

$$\frac{V}{2\pi} = S - u + \left(\frac{u}{S} - 1\right)\xi + \frac{R^2}{2S^3}(\xi^2 - \tfrac{1}{2}\eta^2)$$
$$- \frac{uR^2}{2S^5}(\xi^3 - \tfrac{3}{2}\xi\eta^2) + \cdots,$$

wo zu setzen ist:

$$S^2 = R^2 + u^2.$$

Aus der letzten Entwicklung lässt sich jetzt leicht die Entwicklung für das elektromagnetische Potential V des Stromes, welches zur Bestimmung der Wirkung des letzteren dient, herleiten. Wenn der Strom, wie wir unterstellen wollen, von der positiven Hälfte der x-Axe aus rückläufig erscheint, so ist:

$$\mathrm{V} = \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{V(u) - V(u+\varepsilon)}{\varepsilon} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{dV}{du},$$

oder, wie die Ausrechnung ergiebt:

$$\frac{\sqrt{2}}{2\pi i}\mathrm{V} = 1 - \frac{u}{S} - \frac{R^2}{S^3}\xi + \frac{3uR^2}{2S^5}(\xi^2 - \tfrac{1}{2}\eta^2)$$
$$+ \frac{R^2(R^2 - 4u^2)}{2S^7}(\xi^3 - \tfrac{3}{2}\xi\eta^2) + \cdots$$

Für die Magnetnadel kann man in erster Annäherung, wofern dieselbe von länglicher Gestalt und in gewöhnlicher Weise magnetisirt ist, zwei entgegengesetzt gleiche Pole setzen, die in den Schwerpunkten der nördlichen und südlichen Massen der idealen Oberflächenladung liegen. Es sei q der absolute Werth des magnetischen Quantums, welches in einem Pole concentrirt gedacht wird, und es werde ξ und η auf den Nordpol der abgelenkten Nadel bezogen. Alsdann ergiebt sich aus dem gefundenen Potential des Stromes für das Drehungsmoment der Kraft, womit der letztere auf den Nordpol der abgelenkten Nadel wirkt, in Bezug auf die Drehaxe der letzteren:

$$q\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\xi}\eta - \frac{d\mathrm{V}}{d\eta}\xi\right) =$$
$$-\frac{2iq\pi}{\sqrt{2}}\left\{\frac{R^2}{S^3}\eta - \frac{9uR^2}{2S^5}\xi\eta - \frac{3R^2(R^2 - 4u^2)}{S^7}(\xi^2 - \tfrac{1}{4}\eta^2)\eta + \cdots\right\}.$$

Kehren wir in letzterem Ausdrucke das Vorzeichen der Grössen q, ξ und η um, so erhalten wir das Drehungsmoment der Kraft, womit der Strom auf den Südpol der Nadel wirkt, in Bezug auf die Drehaxe, und indem wir die Momente für den Nord- und Südpol addiren, finden wir für das horizontale Gegenpaar, welches die Wirkung des Stromes auf die Nadel darstellt:

$$\mathrm{Z} = -\frac{4iq\pi R^2\eta}{\sqrt{2}\,S^3}\left\{1 - \frac{3(R^2 - 4u^2)}{S^4}(\xi^2 - \tfrac{1}{4}\eta^2) + \cdots\right\}.$$

Ausser dem elektrischen Strome wirkt auch noch der Erdmagnetismus auf die Magnetnadel, und für das horizontale Gegenpaar, welches diese Wirkung darstellt, hat man, wenn H die horizontale Componente der Kraft bedeutet, womit die Erde auf die Einheit des magnetischen Fluidums einwirkt:

$$Z' = 2qH\xi.$$

Für den Fall des Gleichgewichtes der Nadel verschwindet die Summe $\mathrm{Z} + Z'$. Wenn also die ideale Länge der Nadel, d. h. der Abstand der Pole von einander, durch l, die Ablenkung,

d. h. der Winkel zwischen der magnetischen Axe und dem magnetischen Meridiane, durch ψ und endlich die Stromfläche durch F bezeichnet wird, so ist:

$$i = \frac{HS^3}{\sqrt{2}F} \, tang\, \psi \left\{ 1 + \frac{3\,(R^2 - 4u^2)\,l^2}{4\,S^4} (sin\,\psi^2 - \tfrac{1}{4} cos\,\psi^2) + \cdots \right\}.$$

Aus der letzten Formel ersehen wir, dass man die Stromintensität mit der Tangente des Ablenkungswinkels proportional setzen kann, wenn das Quadrat des Quotienten $l : S$ gegen die Einheit vernachlässigt werden darf. Bei der Boussole von Pouillet, bei welcher die Mitte der Nadel in dem Mittelpunkte des Kreisleiters liegt, muss also die ideale Länge der Nadel im Vergleich mit dem Radius des Leiters möglichst klein sein. Eine grössere Annäherung an die Proportionalität zwischen der Intensität und der Tangente der Ablenkung wird dadurch erzielt, dass man die Mitte der Nadel auf die Axe des Kreises in eine Entfernung von letzterem, welche der Hälfte des Radius gleichkommt, legt, indem alsdann das zweite Glied der eingeklammerten Reihe verschwindet. Diese Einrichtung ist bei der Gaugain'schen Boussole getroffen.

Der Multiplicator dient zunächst zur Messung schwächerer Ströme, aber auch stärkere Ströme lassen sich mittelst desselben dadurch, dass man abgezweigte Theile der Ströme durch den Multiplicator leitet, mit einander vergleichen und auf absolutes Maass zurückführen. Wir wollen hier eine einfachere Form des Multiplicators, wie sie von Weber und Kohlrausch bei einer folgends zu erwähnenden Untersuchung angewandt wurde, näher betrachten. Dieses Instrument besteht aus einer cylindrisch-ringförmigen Drahtrolle, deren Axe horizontal liegt, und einer Magnetnadel, welche an einem durch eine Oeffnung der Rolle hindurch gehenden Faden horizontal und so aufgehangen ist, dass ihr Mittelpunkt mit dem der Rolle zusammenfällt. Bei dem Gebrauche wird die Axe der Rolle in die Ost-Westlinie eingestellt, so dass die Windungen mit dem magnetischen Meridiane parallel laufen, und nachdem der Strom durch die Rolle geleitet worden, die Ablenkung der Nadel nach Gauss'scher Methode mittelst Spiegel, Fernrohr und Skale beobachtet. Es sei nun l die ideale Länge der Nadel, q der absolute Werth des in einem Pole concentrirt gedachten magnetischen Quan-

tums, R_1 der kleinere, R_2 der grössere Radius der Drahtrolle, h die Entfernung ihrer Endflächen von einander und n die Anzahl ihrer Windungen. Ferner sei i die Intensität des Stromes, also $i : 4\lambda$ das Stromquantum, d. h. das Quantum positiver Elektricität, welches während der Zeiteinheit durch den Querschnitt einer Windung fliesst. Alsdann leuchtet ein, dass durch die Flächeneinheit eines axialen Querschnittes der Rolle das Quantum $in : 4\lambda h\,(R_2 - R_1)$ während der Zeiteinheit hindurchfliesst. Wir können daher die Sache so ansehen, als ob der von den Windungen eingenommene Raum stetig von Kreisströmen erfüllt sei, deren Axen in die Axe der Rolle fallen, deren Querschnitte die Elemente $d\sigma$ des axialen Querschnittes der Rolle sind, und deren Intensität gleich $in\,d\sigma : h(R_2 - R_1)$ ist. Wenn wir also durch ψ die Ablenkung der Magnetnadel, durch u den Abstand ihres Mittelpunktes von der Ebene eines der erwähnten Ströme, sowie durch Z den absoluten Werth des horizontalen Gegenpaares bezeichnen, welches die Wirkung der Drahtrolle auf die Magnetnadel darstellt, so ist annähernd nach dem Vorhergehenden für kleine Ablenkungen:

$$\frac{h(R_2 - R_1)}{\sqrt{2}\,in\,q\pi} Z =$$

$$l\cos\psi \int d\sigma \frac{R^2}{S^3}\left\{1 + \frac{3(R^2 - 4u^2)l^2}{16 S^4}\right\} =$$

$$l\cos\psi \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} du \int_{R_1}^{R_2} dR \frac{R^2}{S^3}\left\{1 + \frac{3(R^2 - 4u^2)l^2}{16 S^4}\right\},$$

wo zu setzen ist:

$$S^2 = R^2 + u^2.$$

Durch Ausführung der Integration ergiebt sich, wenn noch das magnetische Moment ql der Nadel durch m und die Entfernung ihres Mittelpunktes von den innern und äussern Rändern der Drahtrolle bezüglich durch S_1 und S_2 bezeichnet wird:

$$Z = \frac{\sqrt{2}\,imn\pi\cos\psi}{R_2 - R_1}\left\{log\frac{R_2 + S_2}{R_1 + S_1} + \left(\frac{R_2^3}{S_2^3} - \frac{R_1^3}{S_1^3}\right)\frac{l^2}{4h^2}\right\}.$$

Für den Fall des Gleichgewichtes hat man also:

$$i = \frac{H}{N} tang\,\psi,$$

wo zu setzen ist:

$$N = \frac{n\pi\sqrt{2}}{R_2 - R_1}\left\{log\frac{R_2 + S_2}{R_1 + S_1} + \left(\frac{R_2^3}{S_2^3} - \frac{R_1^3}{S_1^3}\right)\frac{l^2}{4h^2}\right\}.$$

Der Multiplicator dient nicht allein zur Messung der Intensität constanter Ströme, sondern kann auch zur Vergleichung elektrischer Ströme von sehr kurzer Dauer dienen, d. h. zur Vergleichung elektrischer Quanta, welche den Multiplicator während einer sehr kurzen Zeit durchfliessen. Wenn man einen constanten elektrischen Strom nur während einer sehr kurzen Zeit durch den Multiplicator hindurchfliessen lässt, so besteht seine Wirkung auf die Nadel darin, dass er ihr einen nahezu plötzlichen Impuls ertheilt, in Folge dessen die Nadel ihre Gleichgewichtslage verlässt und entweder zu rotiren, oder um ihre Gleichgewichtslage herum zu oscilliren beginnt. Vernachlässigt man die sehr kleinen Ablenkungen der Nadel während der Dauer des Stromes, so hat man für diese Zeit, unter K das Trägheitsmoment der Nadel in Bezug auf ihre Drehaxe, unter Z_0 den Werth von Z für $\psi = 0$ und unter t die Zeit verstanden:

$$K\frac{d^2\psi}{dt^2} = Z_0.$$

Hieraus ergiebt sich für die Angulargeschwindigkeit C, welche die Nadel durch den Impuls des Stromes erlangt, wenn τ die Dauer des letzteren bedeutet:

$$C = \frac{\tau}{K}Z_0.$$

Es sei nun J das Stromquantum, alsdann sind $+ J\tau$ und $- J\tau$ die elektrischen Quanta, welche den Multiplicator während der Zeit τ in entgegengesetzten Richtungen durchströmen. Dieselbe Wirkung wie diese Quanta würde offenbar das Quantum $+ 2J\tau$ für sich ausüben, wenn es den Multiplicator während derselben Zeit und in derselben Richtung wie das Quantum $+ J\tau$ durchströmte. Da überdies die Wirkung auf die Nadel von der Geschwindigkeit der Elektricität unabhängig sein wird, wofern nur die Dauer der Strömung sehr kurz ist, so folgt: Leitet man durch den Multiplicator das elektrische Quantum Q nach der Erde hin ab, so erlangt die Nadel in Folge der elektrischen Strömung eine Angulargeschwindigkeit C, für welche man hat:

$$C = \frac{2\lambda m N Q}{K}.$$

Was die Bewegung betrifft, welche die Nadel in Folge des erlangten Impulses annimmt, so hat man, wenn nur die Wirkung des Erdmagnetismus auf die Nadel in Betracht kommt und die Torsion des Aufhängungsfadens, sowie die inducirende Wirkung der bewegten Nadel auf die in ihrer Umgebung befindlichen Leiter vernachlässigt werden darf:

$$K \frac{d^2 \psi}{dt^2} = - m H \sin \psi.$$

Hieraus ergiebt sich für den Fall, dass die Bewegung eine oscillirende ist, und wenn Ψ die Amplitude, $\varDelta$ die Dauer einer ganzen Oscillation bedeutet:

$$C = \frac{4\pi}{\varDelta} \sin \tfrac{1}{2} \Psi.$$

Es ist also auch:

$$Q = \frac{H}{\lambda N} \cdot \frac{\varDelta}{2\pi} \sin \tfrac{1}{2} \Psi,$$

woraus folgt, dass der Sinus des halben Ausschlagwinkels unter übrigens gleichen Umständen als Maass für das durch den Multiplicator geleitete elektrische Quantum angesehen werden kann.

Schliesslich wollen wir auch noch an dieser Stelle die Auseinandersetzung der Methode nachtragen, deren Weber sich bei seinen Versuchen über die Ampère'sche Formel bedient hat, um die Einwirkung des Erdmagnetismus auf die angewandte Bifilarrolle zu bestimmen.

Die Wirkung des Erdmagnetismus auf einen Kreisstrom ist dieselbe, wie auf eine von dem Strome begrenzte unendlich dünne, transversal-magnetische Kreisscheibe, deren magnetisches Moment gleich $\frac{i}{\sqrt{2}} F$ ist, unter i die Intensität und unter F die Fläche des Stromes verstanden. Wenn also der Strom um einen verticalen Durchmesser drehbar ist, so stellt er sich senkrecht gegen den magnetischen Meridian. Wird er aus dieser Gleichgewichtslage herausgedreht, so strebt der Erdmagnetismus ihn in jene zurückzudrehen, und hat man für das Gegenpaar, welches diese Wirkung darstellt, wenn der Winkel α, welchen die Ebene des Stromes mit der Gleichgewichtslage bildet, sehr klein

ist und die horizontale Componente des Erdmagnetismus wiederum durch H bezeichnet wird:

$$\frac{i}{\sqrt{2}} F H \alpha.$$

Bei einer kreisförmigen Drahtrolle, wie die von Weber angewandte Bifilarrolle es war, tritt an die Stelle von F die Summe aller der Flächen, welche von den einzelnen Windungen begrenzt werden. Um den Werth dieser Summe, die ideale Fläche der Rolle, zu finden, wenn die Anzahl ihrer Windungen unbekannt ist, kann man wie folgt verfahren. Man lässt die Rolle auf eine entfernte Boussole einwirken, indem man sie parallel dem magnetischen Meridian und so aufstellt, dass ihr Mittelpunkt auf die Ostwestlinie der Magnetnadel zu liegen kommt. Hierauf bestimmt man die Ablenkung derselben Nadel, nachdem man an die Stelle der Rolle eine andere Rolle von bekannter Fläche gesetzt und in dieser dieselbe Stromstärke wie in jener hergestellt hat. Die Flächen beider Rollen verhalten sich alsdann zu einander wie die Ablenkungen der Nadel, wofern nur letztere hinreichend klein sind. Auf diese Weise bestimmte Weber die Fläche der Bifilarrolle und fand sie gleich 293140 Quadratcentimeter.

In dem oben für die Einwirkung der Erde auf eine Bifilarrolle gefundenen Ausdrucke tritt die Intensität des Stromes auf, und es musste daher bei den Weber'schen Versuchen zur Elimination jener Einwirkung die Beziehung zwischen der Intensität und den Angaben des angewandten Galvanometers aufgesucht werden. Das letztere bestand, wie früher bemerkt wurde, aus einem Magnetometer und einer Drahtrolle, deren Axe auf dem magnetischen Meridiane senkrecht stand und durch die Mitte der Magnetometernadel ging. Der Abstand zwischen der Mitte der Rolle und der Mitte der Nadel betrug bei den elektrodynamischen Versuchen 21,7^{cm}. Weber bestimmte nun nach Herstellung eines Stromes die Ablenkung der Nadel, sodann verschob er die Rolle längs der Ostwestlinie in grössere Entfernungen S von der Nadel und bestimmte wiederum die Ablenkungen der Nadel. Auf diese Weise ergab sich, unter β und β' die Ablenkungen in dem einen und anderen Falle verstanden, folgende Relation:

$$\beta' = \frac{13880}{S^3}\,\beta.$$

Andererseits ist aber nach den oben für die Tangentenboussole aufgestellten Formeln, wenn Φ die ideale Fläche der Galvanometerrolle bedeutet, und wenn man berücksichtigt, dass die Ablenkungen sehr klein waren:

$$\beta' = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\Phi}{HS^3},$$

folglich auch:

$$\frac{i}{\sqrt{2}} = 6940\,\frac{H\beta}{\Phi}.$$

Durch Messung wurde nun für die ideale Fläche der Galvanometerrolle 83134,4 und für den Werth von H am Platze des Magnetometers 0,191 erhalten. Es war also:

$$\frac{i}{\sqrt{2}} = 0{,}0159445\,\beta.$$

Die Entfernung des Spiegels von der Skale betrug bei der Galvanometervorrichtung 1103 Theile der Skale. Wenn also γ die doppelte dem Bogen β entsprechende Ablenkung in Theilen der Skale ist, so hat man endlich:

$$\frac{i}{\sqrt{2}} = 3{,}614\,.\,10^{-6}\gamma.$$

Gehen wir jetzt zu der Wirkung zurück, welche der Erdmagnetismus auf die Bifilarrolle ausübte. An ihrem Platze hatte H den Werth 0,138 und ihre ideale Fläche betrug, wie bemerkt, 293140. Hiernach ergiebt sich für den Werth des Gegenpaares E, das an der Bifilarrolle wirkte, wenn sie mit ihrer Gleichgewichtslage den Winkel α bildete und zugleich das Galvanometer die doppelte Ablenkung γ zeigte:

$$E = 0{,}194\,\alpha\gamma.$$

Zum Schlusse unserer Betrachtungen über die Ampère'sche Hypothese vom Wesen des Magnetismus müssen wir noch kurz der Induction des Magnetismus durch einen elektrischen Strom gedenken. Nach der in Rede stehenden Theorie muss aber ein constanter elektrischer Strom in einem Körper, welcher seiner Wirkung ausgesetzt wird, genau denselben magnetischen Zustand hervorrufen wie ein permanenter Magnet, dessen Po-

tential mit dem elektromagnetischen Potentiale des Stromes übereinstimmt. Dass dies in der That der Fall sei, darf wohl aus mehreren Beobachtungen über die Magnetisirung durch elektrische Ströme mit einiger Sicherheit geschlossen werden. Wir wollen uns indessen hier damit begnügen, als Beleg hierfür die Versuche zu erwähnen, welche Lenz und Jacobi über die Magnetisirung von Eisenstäben durch elektrische Spiralen angestellt haben, und deren bereits in der Lehre vom Magnetismus (S. IV. 5.) gedacht wurde, auf welche wir also verweisen.

III.

THEORIE DER STATIONÄREN ELEKTRISCHEN STRÖMUNG.

1. Allgemeine Gesetze der stationären elektrischen Strömung.

Eine Bewegung elektrischer Massen in einem leitenden Körper heisst stationär, wenn die Quantität und Geschwindigkeit der positiven und negativen Elektricität, welche in irgend einem Elemente des Leiters enthalten ist, im Verlaufe der Zeit keinerlei Aenderung erleidet. Als eine solche stationäre Bewegung sehen wir jede elektrische Strömung an, deren Wirkung constant bleibt, wie wir denn auch bei unseren bisherigen Betrachtungen über den constanten linearen elektrischen Strom von dieser Anschauung ausgegangen sind.

Der nähere Grund für die Erhaltung einer stationären elektrischen Strömung ist in der Kraft zu suchen, welche von sämmtlichen ins Spiel tretenden elektrischen Massen ausgeht. Diese sogenannte elektromotorische oder Scheidungs-Kraft trennt in jedem Punkte des Leiters entgegengesetzt gleiche elektrische Quanta von einander und treibt sie nach entgegengesetzten, mit der Kraft parallelen Richtungen auseinander. Wir nehmen an, dass hierbei die elektrischen Quanta, welche durch ein beliebig gelegenes Flächenelement während der Zeiteinheit

hindurchströmen, unter übrigens gleichen Umständen mit der Grösse der elektromotorischen Kraft an der Stelle des Elementes proportional sind.

Die in Bewegung begriffene Elektricität tritt nach dem Vorhergehenden an jeder Stelle im Leiter in entgegengesetzt gleichen Quantitäten auf, und auch die Geschwindigkeiten der letzteren sind entgegengesetzt gleich. Daher ist die in Bewegung begriffene Elektricität nicht im Stande, den neutralen Zustand in irgend einem Punkte des Leiters aufzuheben, und muss die Quelle der elektromotorischen Kraft in ruhenden elektrischen Massen gesucht werden, welche neben der strömenden Elektricität auftreten. Von jener ruhenden Elektricität kann aber bewiesen werden, dass sie nicht durch die Masse des Leiters verbreitet sein kann. Es sei nämlich V das Potential der fraglichen elektrischen Massen im Innern des Leiters, dS das Element einer Niveaufläche und $\varkappa$ eine nur von der Natur des Leiters abhängige, übrigens aber constante Grösse. Alsdann hat man für das elektrische Quantum, welches während der Zeiteinheit durch das Element dS in der Richtung seiner Normale hindurchfliesst:

$$-\varkappa \frac{dV}{dN} dS.$$

Es sei ferner dS' das Element, welches auf einer zweiten unendlich nahe an dS gelegenen Niveaufläche durch die Randnormalen des Elementes dS bestimmt wird, und $\frac{dV'}{dN'}$ sei das Gefälle des Potentiales für die Punkte jenes Elementes. Alsdann kommt für das elektrische Quantum, welches während der Zeiteinheit durch das Element dS' in der Richtung seiner Normale hindurchfliesst:

$$-\varkappa \frac{dV'}{dN'} dS'.$$

Der Ueberschuss des ersten der obigen Ausdrücke über den letzten stellt offenbar die Hälfte des Zuwachses an Elektricität dar, welchen das von den Elementen dS, dS' und ihren Randnormalen begrenzte körperliche Element dk während der Zeiteinheit erlangt, und muss, weil die Strömung stationär ist, verschwinden. Nun ist aber:

$$\frac{dV'}{dN'}dS' - \frac{dV}{dN}dS = \Delta^2 V dk;$$

man hat daher auch für die ganze Ausdehnung des Leiters:

$$\text{I.} \quad \Delta^2 V = 0.$$

In der That müssen also die fraglichen elektrischen Massen ausserhalb oder auf der Oberfläche des Leiters gesucht werden. In den gewöhnlich vorkommenden Fällen, bei der hydroelektrischen und thermoelektrischen Kette, kann die ruhende Elektricität offenbar nicht ausserhalb, sondern nur auf der Oberfläche der Leiter auftreten, und diese Fälle werden wir in der Folge stets vor Augen haben.

Die stationäre elektrische Strömung in einem Leiter ist nach dem Obigen vollständig bestimmt, sobald das Potential V und die Constante $\varkappa$, der sogenannte Fortpflanzungscoefficient des Leiters für Elektricität, gegeben ist. In jedem Punkte des Leiters bewegt sich die Elektricität längs der Kraftlinie des Potentiales, und zwar fliesst die positive Elektricität nach der Seite hin, nach welcher der Werth des Potentiales abnimmt. Die Kraftlinien werden daher hier auch Strömungscurven genannt. Die Stärke der Strömung hat zum Maass den absoluten Werth des Ausdruckes $\varkappa \frac{dV}{dN}$. Demzufolge kann jede stationäre Strömung als ein Complex von constanten linearen Strömen, welche das Volumen des Leiters stetig erfüllen, aufgefasst werden. Legt man nämlich durch alle Randpunkte des Elementes dS einer Gleichgewichtsfläche Kraftlinien, so begrenzen diese einen fadenförmigen Raum, durch dessen verschwindend kleine Querschnitte während der Zeiteinheit gleiche elektrische Quanta fliessen. Der absolute Werth der letzteren fällt, wenn $\frac{dV}{dN}$ das Gefälle des Potentiales an der Stelle des Elementes dS bedeutet, mit dem des Ausdruckes $\varkappa \frac{dV}{dN} dS$ zusammen. Die elektrische Bewegung in dem fadenförmigen Raume kann man also als einen constanten elektrischen Strom betrachten, dessen Curve eine der erwähnten Kraftlinien ist, und dessen Intensität durch den absoluten Werth des Ausdruckes $4\varkappa\lambda \frac{dV}{dN} dS$ darge-

stellt wird. Es lässt sich aber offenbar der ganze Raum des Leiters in solche fadenförmige Elemente wie das betrachtete zerlegen. Man ersieht aus obiger Bemerkung, wie die Betrachtung der elektrodynamischen und elektromagnetischen Wirkung von Leitern, in welchen stationäre Strömungen auftreten, auf die der constanten linearen Ströme zurückgeführt werden kann. Bei solchen Systemen von Leitern, wie wir sie hier im Auge haben, sind die Stromcurven, also auch die soeben besprochenen integrirenden linearen Ströme, in sich geschlossen. Ihre Krümmung ändert sich im Innern des einzelnen Leiters stetig, zeigt aber, wie wir sehen werden, an der Grenzfläche zweier Leiter im Allgemeinen eine Unterbrechung der Stetigkeit.

Für das Potential der ruhenden Elektricität lässt sich, ausser der Bedingung I., welche für die inneren Punkte des Leiters gilt, eine zweite Bedingung aus dem Begriffe der stationären Strömung herleiten, die sich auf das Gefälle des Potentiales an der Oberfläche des Leiters bezieht. Es sei $d\,O$ ein Element der Oberfläche des Leiters A_1 und es grenze der letztere in den Punkten des Elementes an einen zweiten Leiter A_2. Das Potential der ruhenden Elektricität werde für den Raum des ersten Leiters durch V_1, für den des zweiten Leiters durch V_2 bezeichnet. Ferner seien S_1 und S_2 zwei Niveauflächen, von welchen jene in A_1, diese in A_2 unendlich nahe an $d\,O$ liege. Auf diese Flächen projicire man das Element $d\,O$ und bezeichne die Projectionen durch $d\,S_1$ und $d\,S_2$. Endlich seien N_1, n, N_2 die Normalen der Elemente $d\,S_1$, $d\,O$, $d\,S_2$, solche in der Richtung von $d\,S_1$ nach $d\,O$, von A_1 nach A_2, von $d\,O$ nach $d\,S_2$ gerechnet. Alsdann hat man für die elektrischen Quanta, welche während der Zeiteinheit durch $d\,S_1$ und $d\,S_2$ in der Richtung ihrer Normalen hindurchfliessen, bezüglich $-\varkappa_1 \frac{d\,V_1}{d\,N_1} d\,S_1$ und $-\varkappa_2 \frac{d\,V_2}{d\,N_2} d\,S_2$, wenn $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Fortpflanzungs-Coefficienten der Leiter sind. Jene Quanta müssen nun offenbar nach dem Begriffe der stationären Bewegung einander gleich sein, und fallen mit dem Quantum zusammen, welches während der Zeiteinheit durch das Element $d\,O$ von A_1 nach A_2 übergeht. Man hat also:

$$\varkappa_1 \frac{d V_1}{d N_1} d S_1 = \varkappa_2 \frac{d V_2}{d N_2} d S_2,$$

oder auch:

$$\text{II.} \quad \varkappa_1 \frac{d V_1}{d n} = \varkappa_2 \frac{d V_2}{d n}.$$

Wenn insbesondere $\varkappa_2$ verschwindet, oder, was dasselbe heisst, wenn der Leiter A_1 mit dem Elemente $d\,O$ an ein isolirendes Mittel grenzt, so muss $\frac{d V_1}{d n}$ verschwinden. An der freien Oberfläche eines Leiters, d. h. an demjenigen Theile seiner Oberfläche, mit welchem er an ein isolirendes Mittel angrenzt, müssen also die Strömungscurven der Oberfläche parallel laufen und die Niveauflächen senkrecht in letztere einschneiden.

Während das Potential der ruhenden Elektricität im Inneren eines und desselben Leiters stetig verläuft, muss es bei dem Uebergange von einem Leiter zu einem zweiten angrenzenden Leiter auf der Berührungs- oder Trennungsfläche im Allgemeinen eine Discontinuität zeigen. Dies ergiebt sich aus dem Begriffe der stationären Strömung wie folgt. Es sei für die stationäre Strömung in einer Kette von Leitern s der Bogen, ω der Querschnitt eines der integrirenden linearen Ströme. Alsdann hat man für die einzelnen Leiter, durch welche der Strom hindurchgeht, unter $\varkappa$ den Fortpflanzungscoefficienten und unter c eine von der Natur der Leiter unabhängige Constante verstanden:

$$-\varkappa\omega \frac{d V}{d s} = c,$$

oder:

$$V = -c \int \frac{d s}{\varkappa\omega}.$$

Die in sich geschlossene Stromcurve treffe in ihrem Verlaufe der Reihe nach die Leiter $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ mit den Fortpflanzungscoefficienten $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\nu$, und zwar gehe sie durch jeden nur einmal hindurch, wie der Einfachheit wegen angenommen werde. Ferner sei für ein Fortschreiten in der Richtung von A_1 nach A_2 u. s. f. der Werth des Potentiales V an der ersten und letzten Berührungsfläche des ersten Leiters, des zweiten Leiters u. s. f. V_1' und V_1'', V_2' und V_2'' u. s. f. Endlich werde

der Bogen s von der ersten Endfläche des ersten Leiters an gerechnet und die Länge der Stromcurve in den verschiedenen Leitern durch $l_1, l_2, \ldots l_\nu$, die ganze Länge der Stromcurve durch L bezeichnet. Alsdann hat man:

$$V_1' - V_1'' = c \int_0^{l_1} \frac{ds}{\varkappa_1 \omega},$$

$$V_2' - V_2'' = c \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{ds}{\varkappa_2 \omega}, \ldots\ldots V_\nu' - V_\nu'' = c \int_{L-l_\nu}^{L} \frac{ds}{\varkappa_\nu \omega},$$

woraus folgt:

$$c \int_0^L \frac{ds}{\varkappa \omega} = (V_1' + V_2' + \cdots + V_\nu') - (V_1'' + V_2'' + \cdots + V_\nu'').$$

Verliefe nun das Potential auch an den Berührungsflächen der Leiter stetig, so wäre:

$$V_1'' = V_2',\ V_2'' = V_1', \ldots\ldots V_\nu'' = V_1',$$

und es ergäbe sich also, dass die Constante c verschwinden müsse, was nicht möglich ist, wenn überhaupt in der betrachteten Curve eine Strömung auftritt.

Ueber die Discontinuität des Potentiales V an der Berührungsfläche zweier Leiter machen wir die Annahme, dass sie nur durch die in der unmittelbaren Nähe der Fläche auftretenden Verhältnisse bedingt ist. Sind diese Verhältnisse, wie wir unterstellen wollen, auf der ganzen Fläche gleich, so ist auch die Differenz der Potentiale V_1 und V_2 in dem einen und anderen Leiter für alle Punkte der Fläche eine und dieselbe. Alsdann hat man für alle Punkte der Berührungsfläche, unter ε_1 und ε_2 zwei Constanten verstanden:

$$\text{III.} \quad V_1 + \varepsilon_1 = V_2 + \varepsilon_2.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass die Berührungsfläche zweier Leiter von den Niveauflächen der letzteren in einem und demselben Systeme von Curven geschnitten wird. Daher liegen die beiden Tangenten, welche eine Strömungscurve in ih-

rem Durchschnittspunkte mit der Berührungsfläche im Allgemeinen aufweist, in einer Ebene mit der Normale jener Fläche für denselben Punkt, und hat man, wenn φ_1 und φ_2 die Winkel zwischen jenen Tangenten und der Normale sind, wegen der Gleichung II.:

$$tang\,\varphi_1 : tang\,\varphi_2 = \varkappa_1 : \varkappa_2.$$

Durch die Bedingungen I. bis III. ist die Strömung in einer Kette von Leitern vollständig bestimmt. Es seien nämlich V und V' zwei jenen Bedingungen genügende Potentialfunctionen. Ihre Differenz werde durch U bezeichnet. Alsdann hat man wegen der beiden letzten Bedingungen für die Punkte einer Trennungsfläche zweier Leiter, wenn n die von innen nach aussen gerechnete Normale bedeutet und die Marken 1 und 2 sich auf den einen und anderen Leiter beziehen:

$$U_1 - U_2 = 0,\ \varkappa_1 \frac{d\,U_1}{d\,n_1} + \varkappa_2 \frac{d\,U_2}{d\,n_2} = 0.$$

Daher ist auch:

$$\varkappa_1 U_1 \frac{d\,U_1}{d\,n_1} + \varkappa_2 U_2 \frac{d\,U_2}{d\,n_2} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\Sigma \varkappa \int U \frac{d\,U}{d\,n}\, d\,O = 0,$$

wo sich die Integration über die Oberflächenelemente $d\,O$ des einzelnen Leiters, die Summation über alle Glieder der Kette erstreckt. Weil aber ferner $\varDelta^2 U$ wegen der ersten Bedingung innerhalb jedes einzelnen Leiters verschwindet, so ist nach einem bekannten Satze, unter $d\,k$ das körperliche Element eines Leiters und unter N die Normale der Niveaufläche des Potentiales U verstanden:

$$\int U \frac{d\,U}{d\,n}\, d\,O = \int \left(\frac{d\,U}{d\,N}\right)^2 d\,k.$$

Hiernach hat man:

$$\Sigma \varkappa \int \left(\frac{d\,U}{d\,N}\right)^2 d\,k = 0.$$

Die Grösse U ist mithin innerhalb jedes einzelnen Leiters constant, und da sie an der Grenzfläche zweier Leiter keine Unstetigkeit zeigt, so ist sie auch in der ganzen Kette constant,

so dass sich V und V' nur um einen constanten Summanden von einander unterscheiden können.

Bei der hydroelektrischen Kette, auf deren Betrachtung wir uns in der Folge beschränken werden, muss der Grund für die Discontinuität des Potentiales und hiermit für die Entstehung des Stromes in der Wirkung der Molecularkräfte an den Berührungsflächen der auf einander folgenden Glieder der Kette gesucht werden. Hier scheinen über die Constanten ε_1, ε_2 der Gleichung III., welche wir kürzehalber Molecularconstanten nennen wollen, folgende Annahmen zulässig zu sein. Wenn die einander berührenden Leiter beide metallisch sind, so hängt ε_1 lediglich von der Natur des ersten, ε_2 von der Natur des zweiten Leiters ab. Ist aber einer der Leiter, wir wollen sagen der erste, ein Elektrolyt, der zweite ein Metall, so hängt ε_1 von der Natur beider Leiter, ε_2 nur von der des zweiten Leiters ab. Wenn endlich beide Leiter Elektrolyte sind, so sind auch beide Constanten von der Natur beider Leiter abhängig. Aus diesen Annahmen ergeben sich in der That für das Auftreten des elektrischen Stromes in einer geschlossenen Kette dieselben Bedingungen, wie sie die Beobachtung liefert. Man hat nämlich bei einer Kette von ν Leitern für irgend eine durch alle Glieder hindurchgehende integrirende Strömung, wenn die früheren Bezeichnungen beibehalten werden:

$$c\int_0^L \frac{ds}{\varkappa\omega} = (V_1' + V_2' + \cdots + V_\nu') - (V_1'' + V_2'' + \cdots + V_\nu'').$$

Sind nun erstlich alle Glieder von metallischer Natur und werden ihre Molecularconstanten durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu$ bezeichnet, so ist: $V_1'' + \varepsilon_1 = V_2' + \varepsilon_2,\ V_2'' + \varepsilon_2 = V_3' + \varepsilon_3, \ldots.\ V_\nu'' + \varepsilon_\nu = V_1' + \varepsilon_1.$ Daher verschwindet die Grösse c und es entsteht keine elektrische Strömung. In einer Kette von Metallen und Elektrolyten tritt aber im Allgemeinen ein Strom auf. Ist insbesondere der μte Leiter ein Elektrolyt, so kommt, wenn sich ε_μ' auf den Contact desselben mit dem vorhergehenden, ε_μ'' auf den Contact mit dem folgenden Metall bezieht:

$$V_1'' + \varepsilon_1 = V_2' + \varepsilon_2, \ldots\ldots V_{\mu-1}'' + \varepsilon_{\mu-1} = V_\mu' + \varepsilon_\mu',$$
$$V_\mu'' + \varepsilon_\mu'' = V_{\mu+1}' + \varepsilon_{\mu+1}, \ldots\ldots V_\nu'' + \varepsilon_\nu = V_1' + \varepsilon_1,$$

so dass man hat:

$$c \int_0^L \frac{ds}{\varkappa \omega} = \varepsilon_\mu'' - \varepsilon_\mu'.$$

Auch hier verschwindet der Strom, wenn die metallischen Leiter, welche den Elektrolyten einschliessen, von gleicher Beschaffenheit sind. Für die sogenannten constanten galvanischen Elemente, in welchen ausser metallischen Leitern zwei auf einander folgende Elektrolyte auftreten, findet man, wenn letztere sich an der μten und $(\mu + 1)$ten Stelle befinden:

$$c \int_0^L \frac{ds}{\varkappa \omega} = \varepsilon_\mu'' - \varepsilon_\mu' + \varepsilon_{\mu+1}'' - \varepsilon_{\mu+1}'.$$

Die Annahmen, welche im Obigen über die Discontinuität des elektrischen Potentiales in einer geschlossenen galvanischen Kette gemacht wurden, müssen offenbar auch für eine offene Kette gültig bleiben. Da aber in einer solchen keine stationäre Strömung stattfinden kann, weil eine Stromcurve durch eine Berührungsfläche zweier Leiter ebenso oft in der einen wie in der anderen Richtung hindurchgehen würde, so muss ausserdem das Potential innerhalb jedes einzelnen Leiters einen und denselben Werth aufweisen. In der That stehen die Folgerungen, welche sich hieraus ergeben, mit den Fundamentalsätzen von der Contactelektricität im Einklang, wie wir jetzt andeuten wollen. Erstlich hat man für das Gleichgewicht der Elektricität auf zwei einander berührenden, übrigens aber isolirten Conductoren, wenn die frühere Bezeichnung beibehalten wird:

$$V_1 + \varepsilon_1 = V_2 + \varepsilon_2, \text{ oder: } V_1 - V_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

Durch den Contact der beiden Leiter werden hiernach gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität entwickelt, die sich so auf den Oberflächen der Leiter anordnen, dass der Werth ihres Potentiales im ersten Leiter den im zweiten Leiter um die lediglich von der Natur der beiden Leiter abhängige Grösse $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ übertrifft. War einer der Leiter oder waren beide Leiter vor der Berührung geladen oder werden sie nach der Berührung geladen, so verbreiten sich diese Ladungen nur über

die freie Oberfläche der Leiter, und zwar in der Art, dass ihr Potential in der ganzen Ausdehnung beider Leiter einen und denselben Werth erlangt. Wenn die Leiter ursprünglich neutral sind und nach stattgehabter Berührung von einander getrennt werden, so weisen sie entgegengesetzt gleiche Ladungen auf. Der erste Leiter ist mit positiver oder negativer Elektricität und dem entsprechend der zweite mit negativer oder positiver Elektricität geladen, je nachdem ε_1 kleiner oder grösser als ε_2 ist. Der absolute Werth der Differenz $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ dient als Maass für die elektromotorische Kraft, welche durch den Contact entwickelt wird, wobei zu bemerken, dass diese Kraft wohl von der elektromotorischen Kraft einer stationären Strömung zu unterscheiden ist. Es seien zweitens ε_1, ε_2, ε_3 die Molecularconstanten dreier metallischer Leiter, und es sei:

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 < \varepsilon_3,$$

so dass sich der erste Leiter gegen den zweiten und dieser gegen den dritten elektro-positiv verhält. Alsdann ist:

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_3, \quad (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2),$$

d. h. es verhält sich dann auch der erste Leiter gegen den dritten elektro-positiv und die elektromotorische Kraft für den Contact dieser beiden Leiter ist gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte für den Contact des ersten mit dem zweiten und des zweiten mit dem dritten Leiter. Man findet drittens für eine offene Kette von ν metallischen Leitern:

$$V_1 + \varepsilon_1 = V_2 + \varepsilon_2 = \ldots\ldots = V_\nu + \varepsilon_\nu.$$

Hieraus folgt insbesondere:

$$V_1 - V_\nu = \varepsilon_\nu - \varepsilon_1,$$

d. h. der Unterschied der Potentialwerthe in den Endgliedern oder Polen der Kette ist von den Zwischengliedern unabhängig und kommt mithin auch der elektromotorischen Kraft für den Contact jener beiden gleich. Dies gilt im Allgemeinen nicht mehr, sobald in der Kette ein Elektrolyt auftritt. Nimmt dieser etwa die μte Stelle ein und bezieht sich ε_μ' auf den Contact des Elektrolyten mit dem vorhergehenden, ε_μ'' auf den Contact mit dem folgenden Metall, so ist:

$$V_1 + \varepsilon_1 = \ldots\ldots = V_\mu + \varepsilon_\mu', \quad V_\mu + \varepsilon_\mu'' = \ldots\ldots = V_\nu + \varepsilon_\nu,$$

woraus folgt:

$$V_1 - V_\nu = \varepsilon_\nu - \varepsilon_1 + \varepsilon_\mu' - \varepsilon_\mu''.$$

Es ist leicht, aus dem Vorhergehenden zu entnehmen, was eintreten werde, wenn man eines der Endglieder oder beide Endglieder einer offenen Kette mit der Erde in leitende Verbindung setzt.

Litteratur. G. S. Ohm. Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. 1827.

Smaasen. Vom dynamischen Gleichgewicht der Elektricität in einem Körper und im unbegrenzten Raume. Pogg. Annal. Bd. LXXII.

Kirchhoff. Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen. Pogg. Annal. Bd. LXXV. Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst. Pogg. Annal. Bd. LXXVIII.

2. Von der stationären elektrischen Strömung in linearen Leitern.

a. Das Ohm'sche Gesetz.

In einem drahtförmigen Leiter, welcher in eine geschlossene galvanische Kette so eingeschaltet ist, dass er das vorhergehende und das folgende Glied mit je einem Ende berührt, laufen offenbar wegen der für die freie Oberfläche geltenden Bedingung die Strömungscurven nahezu mit einander parallel von dem einen Ende bis zum anderen und weist das Gefälle des Potentiales der ruhenden Elektricität in den verschiedenen Punkten eines Querschnittes nahezu einen und denselben Werth auf. Beides gilt um so mehr, je dünner der Draht ist. Für den Fall nun, wo er als verschwindend dünn angesehen werden kann, sei ω der Querschnitt, s der entsprechende Bogen und V das Potential der ruhenden Elektricität im Inneren des Leiters, welches als Function des Bogens aufgefasst werden kann. Man hat alsdann, da die Bewegung der Elektricität stationär ist:

$$\frac{d\left(\omega \frac{dV}{ds}\right)}{ds} = 0.$$

Wenn der Querschnitt allenthalben constant ist — ein Fall

welchen wir in der Regel stets vor Augen haben werden — so kommt:

$$\text{I.}\quad \frac{d^2 V}{d s^2} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich aber, unter V' den Werth des Potentiales an dem Ende mit dem kleineren Bogen s', unter V'' den am anderen Ende und unter l die Länge des Leiters verstanden:

$$V - V' = \frac{V'' - V'}{l}(s - s').$$

Das Potential V ist also eine lineare Function des Bogens. Diesen Bogen wollen wir aber in der Richtung der positiven Strömung, also so nehmen, dass einem positiven Wachsthum desselben ein negatives Wachsthum des Potentiales entspricht und V' grösser als V'' wird. In dieser Annahme erhalten wir für das Stromquantum J, wenn noch der Fortpflanzungscoefficient durch $\varkappa$ bezeichnet wird:

$$J = -\varkappa\omega\frac{dV}{ds} = \varkappa\omega\frac{V' - V''}{l},$$

oder, wenn wir für den Quotienten $l:\varkappa\omega$, welchen wir den absoluten Widerstand des Leiters nennen werden, den Buchstaben w setzen:

$$J = \frac{V' - V''}{w}.$$

Hieraus ergiebt sich endlich noch für die Intensität des Stromes im linearen Leiter, unter λ die Constante der Weber'schen Fundamentalformel verstanden:

$$i = 4\lambda J = 4\lambda\frac{V' - V''}{w}.$$

Bei einer geschlossenen galvanischen Kette, welche aus lauter linearen, mit den Enden einander berührenden Leitern zusammengesetzt ist, gelten die oben gewonnenen Resultate für jedes einzelne Glied. Die weitere vollständige Bestimmung des Potentiales ergiebt sich hier aus den für die Berührungsstellen geltenden Bedingungen, indem die Bedingung für die freie Oberfläche bereits bei der Bestimmung der Form des Potentiales berücksichtigt wurde. Beiderseits von einer solchen Stelle müssen erstlich gleiche Stromquanta und gleiche Stromrichtungen auftreten. Man hat daher, wenn die verschiedenen in Betracht

kommenden Grössen, welche sich auf die in der Richtung des Bogens s einander folgenden Leiter beziehen, durch dieselben Buchstaben wie früher und in der Unterstellung, dass ν Glieder vorhanden sind, durch die Marken 1, 2, . . . ν bezeichnet werden:

$$\text{II.} \quad \varkappa_1 \omega_1 \frac{dV_1}{ds} = \varkappa_2 \omega_2 \frac{dV_2}{ds} = \cdots\cdots = \varkappa_\nu \omega_\nu \frac{dV_\nu}{ds}.$$

Es ist also auch:

$$\frac{V_1' - V_1''}{w_1} = \frac{V_2' - V_2''}{w_2} = \cdots = \frac{V_\nu' - V_\nu''}{w_\nu},$$

woraus folgt:

$$J(w_1 + w_2 + \cdots + w_\nu)$$
$$= (V_1' + V_2' + \cdots + V_\nu') - (V_1'' + V_2'' + \cdots + V_\nu'').$$

An den Berührungsstellen muss zweitens das Potential unstetig sein, so zwar, dass man hat:

$$\text{III.} \quad V_1'' + \varepsilon_1'' = V_2' + \varepsilon_2',$$
$$V_2'' + \varepsilon_2'' = V_3' + \varepsilon_3', \ldots\ldots \; V_\nu'' + \varepsilon_\nu'' = V_1' + \varepsilon_1',$$

wo ε_1', ε_1'', ε_2', ε_2'' u. s. f. die Molecularconstanten für den Contact des ersten und zweiten, des zweiten und dritten Leiters u. s. f. bedeuten. Die Differenzen $\varepsilon_1'' - \varepsilon_2'$, $\varepsilon_2'' - \varepsilon_3'$, ... $\varepsilon_\nu'' - \varepsilon_1'$ wollen wir durch $e_{1,2}$, $e_{2,3}$, ... $e_{\nu,1}$ bezeichnen und mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen die an den Berührungsstellen entwickelten elektromotorischen Kräfte für ein Fortschreiten in der Richtung des Bogens s nennen. Alsdann liefert die Summation der letzten Gleichungen:

$$e_{1,2} + e_{2,3} + \cdots + e_{\nu,1}$$
$$= (V_1' + V_2' + \cdots + V_\nu') - (V_1'' + V_2'' + \cdots + V_\nu'').$$

Die Combination dieser Gleichung mit der aus II. hergeleiteten ergiebt:

$$J = \frac{\Sigma e}{\Sigma w},$$

wo Σe und Σw für die Summe der elektromotorischen Kräfte und die Summe der Widerstände gesetzt ist. Für die Intensität des Stromes endlich kommt:

$$i = 4\lambda \frac{\Sigma e}{\Sigma w}.$$

Die letzte Gleichung lehrt uns, dass die Intensität des elektrischen Stromes in einer aus linearen Leitern zusammengesetzten Kette mit der Summe der elektromotorischen Kräfte gerade und mit der Summe der Widerstände umgekehrt proportional ist. Dieses Gesetz wurde von Ohm entdeckt und nach ihm benannt.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob und wie das Ohm'sche Gesetz auf den Strom in dem Schliessungsdrahte einer galvanischen Kette von beliebiger Form ausgedehnt werden könne. Für jeden der integrirenden Ströme, welcher durch alle Glieder der Kette hindurch geht, hat man, wenn die bisherige Bezeichnung beibehalten wird:

$$c\int_0^L \frac{ds}{\varkappa\omega} = \Sigma e.$$

Der hier auftretende Bogen werde von demjenigen Ende des Schliessungsdrahtes an gerechnet, in welchem das Potential für letzteren seinen grössten Werth aufweist. In demselben Punkte tritt die positive Strömung aus der Kette in den Schliessungsdraht, weshalb wir denselben auch — als Punkt der Kette — die positive Elektrode oder den positiven Pol der Kette nennen werden, während der Punkt, in welchem das andere Ende des Schliessungsdrahtes die Kette trifft, die negative Elektrode oder der negative Pol der Kette heissen soll. Um die positive Elektrode als Mittelpunkt werde nun eine verschwindend kleine Kugelfläche gelegt. Sie liegt zur Hälfte in dem betreffenden Endgliede der Kette und diese Hälfte werde durch σ, eines ihrer Elemente durch $d\sigma$ bezeichnet. Alsdann ist:

$$\int d\sigma\, c\int_0^L \frac{ds}{\varkappa\omega} = \sigma\,\Sigma e.$$

Nun hat man offenbar für denjenigen Theil des links stehenden Ausdruckes, welcher sich auf die Ströme im Schliessungsdraht bezieht, $\sigma J w$, wenn J das Stromquantum, l die Länge und w den Widerstand dieses Leiters bedeutet. Daher ist:

$$Jw + \frac{1}{\sigma}\int d\sigma\, c \int_{l}^{L} \frac{ds}{\varkappa\,\omega} = \Sigma e.$$

Das zweite Glied in dieser Gleichung ist von der Form des Schliessungsdrahtes insofern unabhängig, als die Elektricität auf der freien Oberfläche jenes Leiters keine merkliche directe Wirkung auf die Kette äussert. Ueberdies hat man, wie leicht einzusehen:

$$\int \frac{c\,d\sigma}{\omega} = J.$$

Setzen wir daher für das fragliche Glied JW, so wird W nur von dem Bau der Kette und der Lage der Elektroden abhängen und kommt, wenn noch für Σe, die sogenannte elektromotorische Kraft der ganzen Kette, E gesetzt wird:

$$J = \frac{E}{W + w}.$$

Um den Betrag der Grösse W, des sogenannten Widerstandes in der Kette, möglichst herunterzudrücken, giebt man den metallischen Leitern, welche die Elektrolyte einschliessen, die Form von Platten und stellt diese möglichst nahe einander gegenüber. Alsdann kommen wegen des geringen Abstandes der Metallplatten und wegen der verhältnissmässig geringen Leitungsfähigkeit der Elektrolyte hauptsächlich nur die Ströme in der Flüssigkeitsschicht zwischen den einander zugekehrten Flächen der Metalle in Betracht und diese Ströme gehen nahezu senkrecht durch die Schicht hindurch und sind von der Lage der Elektroden annähernd unabhängig. Annähernd ist also hier auch der Widerstand W nur von den trennenden Schichten der Elektrolyte abhängig. Bei einer flüssigen Schicht, die allenthalben gleich dick ist, erlangt die Strömung allenthalben nahezu gleiche Stärke und ergiebt sich für den betreffenden Theil des Widerstandes, analog wie bei linearen Leitern, in erster Annäherung $\frac{d}{\varkappa O}$, wenn d die Dicke, O die Oberfläche und $\varkappa$ der Fortpflanzungscoefficient der Schicht ist.

An das Vorhergehende schliessen wir die Betrachtung zweier besonders wichtiger Systeme von galvanischen Ketten.

Es werde erstlich eine Reihe von Ketten durch lineare Leiter zu einer einzigen Kette verbunden. In jeder componirenden Kette wird nahezu dieselbe Art — nicht aber Stärke, noch auch Richtung — der Strömung auftreten, wie wenn sie für sich durch einen Leiter geschlossen würde, indem das Potential in ihr zum bei weitem grössten Theile nur von der in ihr enthaltenen Elektricität herrührt, ähnlich wie bei einem Systeme von Leydener Flaschen. Hiernach ergiebt sich aus dem Vorhergehenden ohne Weiteres für das Stromquantum J in einem der linearen Verbindungsstücke, wenn W den Widerstand, E die elektromotorische Kraft der einzelnen Kette für ein Fortschreiten in der Richtung der positiven Strömung im Schliessungsdrahte und w die Summe der Widerstände in den Verbindungsstücken bedeutet:

$$J = \frac{\Sigma E}{\Sigma W + w}.$$

Zu den betrachteten Systemen gehört die galvanische Säule. Sie ist aus gleichen galvanischen Elementen — Ketten, in welchen nur eine einzige Unterbrechung der metallischen Leitung stattfindet — zusammengesetzt, so zwar, dass die entgegengesetzten Pole zweier einander folgender Elemente mit einander verbunden sind. Für die galvanische Säule hat man, wenn n die Anzahl ihrer Elemente ist:

$$J = \frac{E}{W + \frac{w}{n}}.$$

Es seien zweitens a_1' und a_1'', a_2' und a_2'', ... a_n' und a_n'' die Elektroden von n galvanischen Ketten. Die Elektroden a_1', ... a_n' seien mit einander durch gleichartige Drähte verbunden, welche die Elektroden mit je einem Ende berühren und mit den anderen Enden in einem Punkte O' zusammenstossen. In gleicher Weise seien die Elektroden a_1'', ... a_n'' mit einander durch Drähte verbunden, welche sich in dem Punkte O'' vereinigen. Die Art der Strömung in jeder componirenden Kette ist wiederum und aus denselben Gründen wie in den zuerst betrachteten Systemen von den übrigen Bestandtheilen des Systemes nahezu unabhängig. Es werde nun durch s der Bogen eines integrirenden Stromes in einer der Ketten bezeich-

net und dieser Bogen, abgesehen von der Richtung des Stromes, von O' an nach O'' hin gerechnet; seine ganze Länge zwischen diesen Punkten sei L. Für denselben Strom bedeute c das elektrische Quantum, welches durch den Querschnitt ω während der Zeiteinheit in der Richtung des Bogens hindurchfliesst. Ferner werde der Werth des Potentiales in O' und O'' bezüglich durch V' und V'', die elektromotorische Kraft der Kette für ein Fortschreiten in der Richtung des Bogens durch E dargestellt, endlich den Buchstaben $\varkappa$ und σ dieselbe Bedeutung wie früher beigelegt. Man hat alsdann:

$$\frac{1}{\sigma}\int d\sigma\, c \int_0^L \frac{ds}{\varkappa\,\omega} = V' - V'' + E.$$

Deshalb ergiebt sich für das elektrische Quantum J, welches durch den Querschnitt der Elektrodendrähte in der Richtung von O' nach O'' während der Zeiteinheit hindurchfliesst, wenn noch w für die Summe der Widerstände in jenen Drähten und W für den Widerstand in der Kette gesetzt wird:

$$J(W + w) = V' - V'' + E.$$

Hieraus folgt, wenn sich die Marken $1, 2, \ldots n$ auf die verschiedenen componirenden Ketten beziehen:

$$J_1 (W_1 + w_1) - E_1 = J_2 (W_2 + w_2) \\ - E_2 = \cdots\cdots = J_n (W_n + w_n) - E_n.$$

Ausserdem hat man offenbar:

$$J_1 + J_2 + \cdots + J_n = 0,$$

so dass sich die Stromquanta in den Elektrodendrähten vollkommen bestimmen, sobald die Constanten E, W, w bekannt sind. Man findet für die Kette, auf welche sich die Marke μ bezieht:

$$J_\mu = \frac{\sum \frac{E_\mu - E}{W + w}}{\sum \frac{W_\mu + w_\mu}{W + w}}.$$

Man bemerke übrigens, dass die drei letzten Relationen auch offenbar in dem Falle noch gelten, wo nicht, wie der Einfachheit wegen unterstellt wurde, die in den Punkten O' und O'' zusammenstossenden Drähte von gleichem Stoffe sind.

Dadurch, dass eine der componirenden Ketten sich auf einen linearen Leiter reducirt, für die übrigen Ketten gleiche galvanische Elemente genommen und die gleichnamigen Pole dieser Elemente verbunden werden, geht das System in ein zusammengesetztes Element von gewöhnlicher Form über. Hier ergiebt sich dem Obigen zufolge für das Stromquantum im Schliessungsdrahte, wenn die Widerstände in den Elektrodendrähten vernachlässigt, oder als gleich angenommen und zu den Widerständen der Elemente hinzugerechnet werden, und wenn w den Widerstand im Schliessungsdraht, n die Anzahl der Elemente bedeutet:

$$J = \frac{E}{\frac{W}{n} + w}.$$

Endlich möge noch der Fall betrachtet werden, wo alle Ketten mit Ausnahme einer einzigen durch lineare Leiter ersetzt werden. Hier ergiebt sich für das Stromquantum in den Elektrodendrähten der Kette:

$$J = \frac{E}{W + \frac{1}{\sum \frac{1}{w}}},$$

wo W den Widerstand in der Kette und ihren Elektrodendrähten bedeutet und die durch Σ angedeutete Summation sich über die von O' nach O'' hinlaufenden Leiter erstreckt. Für das Stromquantum in einem der letzteren kommt:

$$J_\mu = \frac{J}{\sum \frac{w_\mu}{w}}.$$

Hieraus folgt: Wenn sich ein linearer elektrischer Strom in der Art verzweigt, dass die Zweigströme aus einem und demselben Punkte ausgehen und sich auch wiederum in einem und demselben Punkte vereinigen, so verhalten sich die Quanta oder Intensitäten der Zweigströme zu einander wie die reciproken Werthe der Widerstände ihrer Leiter.

Von den ausserordentlich zahlreichen Versuchen, welche das Ohm'sche Gesetz bestätigen, wollen wir hier nur einige wenige aufführen.

Erstens. J. Müller (Fortschritte der Physik. 1849.) bestimmte die Ablenkung der Nadel einer Tangentenboussole durch den elektrischen Strom eines Grove'schen Elementes, in dessen Schliessung der Reihe nach verschiedene Längen eines und desselben Drahtes eingeschaltet wurden. Für Einschaltungen, welche sich verhielten wie die Zahlen:

$$0,\ 72,\ 292,\ 490,$$

ergaben sich folgende Ablenkungen:

$$30^0 48',\ 23^0 30',\ 13^0 42',\ 9^0 42'.$$

Es sei nun W der Widerstand der ganzen Leitung für den Fall, dass die Einschaltung gleich Null ist, also die Summe der Widerstände in dem Elemente, der Boussole und den Verbindungsstücken. Ferner sei E die elektromotorische Kraft und w der Widerstand in dem angewandten Drahte bei der Länge Eins. Alsdann hat man nach dem Ohm'schen Gesetze für das Stromquantum bei der Einschaltung l:

$$J = \frac{E}{W + lw}.$$

Ferner hat man mit Rücksicht auf die Formel für eine Tangentenboussole mit centrischer Nadel, unter ψ die Ablenkung verstanden:

$$tg\,\psi = \frac{AE}{W + lw},$$

wo A nur von der horizontalen Componente des Erdmagnetismus und von dem Radius der Boussole abhängt. Aus obigen Formeln ergiebt sich, wenn ψ_0 die der Einschaltung Null entsprechende Ablenkung ist:

$$\frac{AE}{w} = \frac{l}{cotg\,\psi - cotg\,\psi_0}.$$

Für den rechter Hand stehenden Ausdruck müssen sich also aus den beobachteten Grössen gleiche Werthe ergeben. In der That findet man die drei Werthe:

$$115{,}7,\ 120{,}9,\ 117{,}4.$$

Zweitens. Bewirkt man durch gehörige Einschaltung von Widerständen mittelst eines Rheostaten, dass die Ströme zweier Elemente die Nadel eines und desselben Multiplicators um gleichviel ablenken, so hat, man unter E und E' die elek-

tromotorischen Kräfte der Elemente und unter W und W' die Widerstände ihrer Ströme verstanden:

$$1.\quad \frac{E}{W} = \frac{E'}{W'}.$$

Vergrössert man dann bei dem einen und anderen Elemente den Widerstand, und zwar so, dass wiederum gleiche Ausschläge am Multiplicator erzielt werden, so ist, wenn w und w' die Wachsthümer des Widerstandes bedeuten:

$$2.\quad \frac{E}{W+w} = \frac{E'}{W'+w'}.$$

Aus den Gleichungen 1. und 2. folgt aber:

$$w'E = wE'.$$

Hiernach müssen die Einschaltungen bei verschieden geformten aber aus denselben Bestandtheilen zusammengesetzten Elementen gleich werden. Um diese Folgerung aus dem Ohm'schen Gesetze zu bestätigen, stellte Wheatstone (Beschreibung verschiedener neuer Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Constanten einer Volta'schen Kette. Pogg. Annal. Bd. LXII.) in der angegebenen Weise Versuche mit Elementen an, welche aus flüssigem Zinkamalgam, Kupfer und Kupfervitriollösung bestanden. Das Amalgam befand sich in einem porösen Cylinder, welcher in der Kupfervitriollösung stand und von einem cylindrisch gebogenen Kupferblech umgeben war. In dem grössten Elemente betrug die Höhe des Kupfercylinders 6 Zoll, der Durchmesser 3,5 Zoll und in dem mittleren Elemente betrugen diese Dimensionen bezüglich 3,5 und 2,5 Zoll. Bei jedem dieser Elemente mussten 30 Umgänge des angewandten Rheostaten eingeschaltet werden, um die Nadel des Multiplicators von dem jedesmal hergestellten Stande von 45° auf den Stand von 40° zu bringen.

Drittens. Wendet man die oben angegebene Methode auf zwei Säulen an, die bezüglich aus n und n' gleichen Elementen bestehen, so kommt:

$$nw' = n'w, \text{ oder: } n:n' = w:w'.$$

Auch diese Relation hat Wheatstone bestätigt gefunden, indem bei Anwendung von 1, 2, 3, 4 und 5 Elementen die Einschaltungen sich wie die Zahlen 30, 61, 91, 120, 150 verhielten.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ist leicht zu ent-

nehmen, wie man durch Vergleichung linearer Ströme und mit Hülfe des Ohm'schen Gesetzes elektromotorische Kräfte, sowie auch Widerstände und Fortpflanzungscoefficienten mit einander zu vergleichen im Stande ist. In Betreff der letzteren möge hier erwähnt werden, dass die Fortpflanzungscoefficienten der Metalle mit zunehmender Temperatur kleiner werden und dass ihre Aenderungen innerhalb der gewöhnlichen Temperaturgrenzen ohne erheblichen Fehler mit den Aenderungen der Temperatur proportional gesetzt werden können. Für diese Grenzen ist also, unter $\varkappa_0$ und $\varkappa$ den Werth des fraglichen Coefficienten für die Temperaturen 0^0 und u^0 und unter θ eine von der Natur des betreffenden Metalles abhängige Constante verstanden:

$$\varkappa = \varkappa_0(1 - \theta u).$$

Beim Kupfer ist z. B. nach Arndtsen (über den galvanischen Leitungswiderstand der Metalle bei verschiedenen Temperaturen. Pogg. Annal. Bd. CIV.):

$$\theta = 0{,}00269.$$

b. Elektroskopische Eigenschaften der galvanischen Kette.

Ueber die elektroskopischen Eigenschaften der galvanischen Kette hat Kohlrausch (die elektroskopischen Eigenschaften der geschlossenen galvanischen Kette. Pogg. Annal. Bd. LXXVIII.) Versuche angestellt, deren Ergebnisse in vollkommenem Einklang mit der Theorie stehen. Die angewandte Kette war eine Daniell'sche; ihre Zinktafel stand in einem mit Zinkvitriol gefüllten Thonbecher, welcher sich an dem einen Ende eines mit Kupfervitriol gefüllten Troges befand, während an dem anderen Ende die Kupfertafel, in den Kupfervitriol eingetaucht, stand. Beide Metalltafeln standen mit Quecksilbernäpfchen in Verbindung, welche ihrerseits durch Kupferdrähte mit den Enden eines in Zickzackform isolirt aufgespannten, dünnen Messingdrahtes verbunden werden konnten. Ausser der Kette kam ferner ein Condensator in Anwendung. Seine Condensatorplatte war aus Kupfer und stand mit der Erde durch einen Kupferdraht in leitender Verbindung. Die Collectorplatte

war aus Zink und ihre Ladung wurde mit Hülfe eines Dellmann'schen Elektrometers (Pogg. Annal. Bd. LXXV.) bestimmt. Unter anderen stellte Kohlrausch mit den angegebenen Apparaten folgende Versuche an.

Erstens. Nach Schliessung der Kette durch den Messingdraht wurde das Näpfchen der Zinkplatte mittelst eines Kupferdrahtes abgeleitet und die Collectorplatte gleichfalls durch einen Kupferdraht mit einem dritten isolirt stehenden Quecksilbernäpfchen verbunden. Sodann wurde dieses Näpfchen durch einen Kupferdraht mit einem Punkte des zickzackförmigen Schliessungsdrahtes verbunden, hierauf die Verbindung zwischen der Collectorplatte und dem dritten Näpfchen wiederum aufgehoben und endlich die Ladung jener Platte mittelst des Elektrometers bestimmt. Es ergaben sich auf diese Weise für verschiedene Punkte des Schliessungsdrahtes die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Resultate. Die erste Columne enthält die Längen l des Messingdrahtes zwischen dem mit der Zinkplatte der Säule verbundenen Ende und dem mit der Collectorplatte verbundenen Punkte, die zweite Columne enthält die entsprechenden Torsionswinkel θ des Elektrometers:

l	θ	l	θ
118,5	25,2°	610,3	84,7°
237,0	36,2	745,3	103,3
355,5	47,1	879,0	123,3
474,0	62,0	1014,0	147,2

Zweitens. Die Condensatorplatte des Condensators wurde durch einen isolirten Zinkdraht mit der Collectorplatte in leitende Verbindung gesetzt und, nachdem diese Verbindung wiederum aufgehoben, die Ladung der Collectorplatte bestimmt. Sie war positiv und es entsprach ihr am Elektrometer der Torsionswinkel 17,4°.

Drittens. Die Kupferplatte der offenen Kette wurde durch einen in das betreffende Näpfchen getauchten Kupferdraht abgeleitet, ferner das Näpfchen der Zinkplatte durch einen

Kupferdraht mit dem dritten Näpfchen und letzteres, gleichfalls durch einen Kupferdraht, mit der Collectorplatte des Condensators verbunden. Nachdem sodann wiederum die letzt erwähnte Verbindung aufgehoben, wurde die Ladung der Collectorplatte ermittelt. Diese Ladung war negativ, und es entsprach ihr die Torsion 20,1°. In ähnlicher Weise ergab sich, als das Näpfchen des Zinkpoles abgeleitet, das des Kupferpoles hingegen mit dem Condensator verbunden wurde, eine positive Ladung der Collectorplatte mit der Torsion 168°.

Viertens. Es wurde der Gesammtwiderstand der durch den Messingdraht geschlossenen Kette gesucht und gleich dem eines Drahtes von derselben Beschaffenheit wie der Schliessungsdraht und von der Länge 1117,5 gefunden, letztere durch dieselbe Einheit, wie die Längen l, gemessen.

Es sollen jetzt die obigen Ergebnisse mit der Theorie verglichen werden. Was zunächst die erste Versuchsreihe betrifft, so leuchtet ein, dass die hier auftretende Elektricität bestand aus der Ladung, wie sie in der geschlossenen Kette für sich auftreten musste, und der Ladung der offenen Kette, welche von folgenden Gliedern gebildet wurde: Collectorplatte, Leiter zwischen letzterer und dem Schliessungsdraht, geschlossene Kette, Ableitungsdraht der Zinkplatte, Erde, Ableitungsdraht der Condensatorplatte, Condensatorplatte. Es werde nun durch V' das Potential der Elektricität an dem mit der Zinkplatte verbundenen Ende des Messingdrahtes, durch V'' das Potential in dem mit dem Condensator verbundenen Punkte desselben Drahtes bezeichnet. Ferner sei V' das Potential in der Condensator-, V'' das in der Collectorplatte und ε_k, ε_z seien die Molecularconstanten für Kupfer und Zink. Die Betrachtung der eben erwähnten offenen Kette liefert alsdann:

$$\mathrm{V}'' - \mathrm{V}' = V'' - V' + \varepsilon_k - \varepsilon_z.$$

Ferner hat man für die geschlossene Kette, wenn ihre elektromotorische Kraft durch E und die im vierten Versuche ermittelte Länge durch L bezeichnet wird:

$$V'' - V' = \frac{l}{L} E;$$

folglich ist auch:

$$V'' - V' = \frac{l}{L} E + \varepsilon_k - \varepsilon_z.$$

Die Grössen V′, V″ fallen nahezu mit den Werthen zusammen, welche das Potential der im Condensator allein enthaltenen Elektricität in der einen und anderen Platte aufweist, so dass auch V″ — V′ mit der Ladung der Collectorplatte merklich proportional ist. Bezeichnen wir also durch k eine von der Beschaffenheit des Condensators abhängige Constante, so ist:

$$k\sqrt{\theta} = \frac{l}{L} E + \varepsilon_k - \varepsilon_z.$$

Bei dem zweiten Versuche über die durch den Contact von Kupfer und Zink entwickelte elektromotorische Kraft war, wenn die obige Bezeichnung beibehalten wird:

$$V'' - V' = \varepsilon_k - \varepsilon_z,$$

woraus mit Rücksicht auf das Ergebniss dieses Versuches folgt:

$$k\sqrt{17{,}4} = \varepsilon_k - \varepsilon_z.$$

Die Combination der letzten und drittletzten Gleichung liefert nun:

$$\frac{\sqrt{\theta} - \sqrt{17{,}4}}{l} = \frac{E}{kL}.$$

Der linker Hand stehende Ausdruck muss hiernach, wenn die Versuche mit der Theorie übereinstimmen sollen, nach Substitution der in der ersten Versuchsreihe gewonnenen zu einander gehörigen Werthe von θ und l, gleiche Werthe liefern. In der That ist dies nahe der Fall, wie man aus der folgenden Tabelle ersieht, in welcher die mit 10^5 multiplicirten Werthe des fraglichen Ausdruckes oder die Werthe des Quotienten $10^5 E:kL$ aufgeführt sind.

l	$10^5 E:kL$	l	$10^5 E:kL$
118,5	716	610,3	824
237,0	779	745,3	804
355,5	757	879,0	789
474,0	781	1014,0	785

Eine weitere Bestätigung der Theorie liefern die zwei an der offenen Kette angestellten Versuche. Hier war, wie leicht einzusehen, bezüglich in den beiden Fällen:

$$V'' - V' = -E + \varepsilon_k - \varepsilon_z, \quad V'' - V' = E + \varepsilon_k - \varepsilon_z,$$

oder mit Rücksicht auf den zweiten Versuch:

$$E = k\,(\sqrt{\theta} + \sqrt{17,4}), \quad E = k\,(\sqrt{\theta} - \sqrt{17,4}).$$

Hiernach ergeben sich aus den beobachteten Torsionswinkeln für $E:k$ die Werthe 8,65 und 8,79. Aus dem arithmetischen Mittel dieser Werthe und dem durch den vierten Versuch bestimmten Werthe von L berechnet sich für den Quotienten $10^5 E:kL$ der Werth 780 und dieser stimmt nahe mit dem mittleren Werthe 779 überein, welcher für dieselbe Grösse aus dem ersten und zweiten Versuche hervorgeht.

c. Das Joule-Lenz'sche Gesetz.

Während der stationären Strömung in einer galvanischen Kette leisten die elektrischen Kräfte eine gewisse Arbeit, welche wir jetzt näher betrachten wollen.

Auf ein einzelnes bewegtes elektrisches Theilchen wirken sowohl die über die Oberflächen der Leiter verbreiteten ruhenden elektrischen Massen, als auch die gesammte in Strömung begriffene Elektricität. Nun folgt aber aus der Weber'schen Fundamentalformel, wie wir bei Erörterung der elektrodynamischen Induction sehen werden, dass die Kraft, welche die Wirkung eines linearen in sich geschlossenen Stromes auf ein bewegtes elektrisches Theilchen darstellt, senkrecht auf der Bahn

des letzteren steht. Wir schliessen hieraus, dass bei Bestimmung der Arbeit in der galvanischen Kette jedenfalls nur die Kraft in Betracht zu ziehen ist, womit die ruhende Elektricität auf die fliessende Elektricität einwirkt. Von dieser Kraft scheint überdies unter gewöhnlichen Umständen nur derjenige Theil in Rechnung zu kommen, welcher von der Geschwindigkeit des sollicitirten Theilchens unabhängig ist, also diejenige Kraft, welche wir die elektromotorische Kraft der stationären Bewegung nennen, und die von der sogenannten elektromotorischen Kraft der Kette wohl zu unterscheiden ist. Dies unterstellt, ergiebt sich zuvörderst als Ausdruck für die Arbeit, welche in einem Theile der Kette oder in der ganzen Kette während einer gegebenen Zeit geleistet wird, das Product aus der Zeit und der Arbeit, welche in dem betreffenden Raume von der elektromotorischen Kraft während der Zeiteinheit geleistet wird. Die letzte Grösse lässt sich aber wie folgt bestimmen.

Die Arbeit, welche während der Zeiteinheit in dem Elemente eines integrirenden linearen Stromes geleistet wird, ist offenbar doppelt so gross wie die Arbeit der Kräfte, welche an der im Elemente enthaltenen positiven Elektricität wirken, und daher auch doppelt so gross wie die Arbeit, welche in der Zeiteinheit geleistet würde, wenn sich das im Elemente enthaltene positive Quantum unter der constanten Einwirkung der elektromotorischen Kraft in der Richtung dieser Kraft mit der Geschwindigkeit der Elektricität bewegen würde. Bezeichnen wir also durch c das Stromquantum, durch ds die Länge des Stromelementes und durch P die an der Stelle des Elementes auftretende und auf die elektrische Einheit bezogene Kraft, so kommt für die fragliche Grösse:

$$2\,c\,P\,ds.$$

Bedeutet aber V das Potential der Elektricität, $\varkappa$ den Fortpflanzungscoefficienten und ω den Querschnitt des Elementes, so haben wir:

$$c = -\varkappa\omega\frac{dV}{ds},\quad P = -\frac{dV}{ds};$$

daher können wir für den erhaltenen Ausdruck auch schreiben, wenn wir noch das Volumen des Elementes durch dk bezeichnen

und statt ds das Differential dN der Normale der Niveaufläche einführen:

$$2\varkappa\left(\frac{dV}{dN}\right)^2 dk.$$

Hieraus ergiebt sich sofort für die Arbeit, welche in irgend einem Theile oder in der ganzen Ausdehnung des Leiters geleistet wird:

$$2\varkappa\int\left(\frac{dV}{dN}\right)^2 dk,$$

wo sich die Integration über den betreffenden Raum erstreckt.

Ferner kommt für die Arbeit in der ganzen Kette:

$$2\sum\varkappa\int\left(\frac{dV}{dN}\right)^2 dk,$$

wo die Integration über alle Elemente des einzelnen Leiters, die Summation über alle Glieder der Kette auszudehnen ist.

Der Ausdruck für die Arbeit in der ganzen Kette erlangt stets einen positiven Zuwachs, wenn man in ihm die Grösse V um eine Potentialfunction variirt, welche in der ganzen Ausdehnung der Kette verschwindend kleine Werthe aufweist und in den Punkten der Grenzfläche zweier Leiter für jeden von diesen gleiche Werthe erlangt, übrigens aber beliebig ist. Dies ergiebt sich, wenn man nach der angegebenen Variation die Integration nach dem Volumen auf eine Integration nach der Oberfläche zurückführt und die drei Bedingungen berücksichtigt, welchen die Function V unterworfen ist. In Uebereinstimmung mit dem Princip der kleinsten Wirkung ist also die in der Kette geleistete Arbeit ein Minimum unter den Arbeitsgrössen, welche sich ergäben, wenn die ruhenden elektrischen Massen in der Art beliebig variirt würden, dass ihr Potential an den Berührungsflächen der Leiter stets die dem Contacte entsprechenden Discontinuitäten zeigte.

Das Prinzip der Erhaltung der Kraft lehrt, dass bei der Bewegung eines Systems von Punkten die Hälfte des Gewinnes an lebendiger Kraft der von den thätigen Kräften geleisteten Arbeit gleichkommt. Bei der stationären elektrischen Strömung bleibt nun aber die lebendige Kraft der Elektricität constant. Daher kann hier der Gewinn an lebendiger Kraft nur zu suchen

sein in der gewöhnlichen Bewegung der ponderabeln Materie, welche durch die Einwirkung der Strömung auf eine andere Strömung oder einen Magnet erzeugt wird, und in derjenigen Bewegung imponderabler oder ponderabler Materie, auf welche wir die Wärme zurückführen, die bekanntlich stets in den Leitern durch die Thätigkeit des Stromes entwickelt wird. Wenn also, wie wir unterstellen wollen, eine elektrodynamische Wirkung der Strömung nicht stattfindet, so ist die gewonnene lebendige Kraft nur in der entwickelten Wärme zu suchen. Es sei nun C die Wärmemenge, welche in einer geschlossenen galvanischen Kette während der Zeiteinheit erzeugt wird, hierbei als Einheit die Wärme genommen, welche die Temperatur eines Grammes Wasser um einen Grad der hunderttheiligen Skala erhöht. Ferner werde die Hälfte der lebendigen Kraft, welche jener Wärmeeinheit entspricht, durch Ag bezeichnet, wo A eine Constante und g die Endgeschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach der ersten Secunde, in Centimeter ausgedrückt, bedeute, so dass die Schwerkraft, wenn ein Gewicht von A Grammen um 1 Centimeter gesenkt wird, eine Arbeit leistet, welche der halben lebendigen Kraft der Wärmeeinheit gleichkommt. Man hat alsdann:

$$gAC = 2\sum \varkappa \int \left(\frac{dV}{dN}\right)^2 dk.$$

Hieraus folgt ins Besondere für einen linearen Leiter, wenn w den Widerstand und J das Stromquantum bedeutet:

$$gAC = 2wJ^2,$$

oder, wenn man statt des Stromquantums J die Intensität i, welche aus jenem durch Multiplication mit 4λ gewonnen wird, einführt:

$$2gAC = \frac{wi^2}{4\lambda^2}.$$

Die nach der letzten Formel bestehende Proportionalität zwischen der Wärmemenge, welche in einem linearen Leiter durch den elektrischen Strom entwickelt wird, und dem Producte aus dem Quadrate der Intensität und dem Widerstande wurde von Joule, sowie von Lenz (über die Gesetze der Wärmeentwicklung. Pogg. Ann. LIX, LXI.) auf experimentellem Wege entdeckt. Als fernere Bestätigung der Formel wollen wir

hier einige der Versuche erwähnen, welche von Quintus Icilius (über den numerischen Werth der Constanten in der Formel für die elektrodynamische Erwärmung von Metalldrähten. Pogg. Ann. CI.) zur Ermittelung der Constante A angestellt hat.

Der Leiter, dessen Erwärmung bestimmt wurde, war in den beiden zu erwähnenden Versuchen ein dünner Kupferdraht, der in mehrfachen Windungen über ein isolirendes Gestell gewickelt war und mit diesem sich in einem mit Wasser gefüllten Calorimeter aus Kupfer befand. Bei dieser Anordnung musste nach Herstellung des Stromes in dem Wasser eine schwache Nebenleitung stattfinden, die jedoch ohne erheblichen Fehler ausser Acht gelassen werden konnte. Die Enden des Leiters gingen durch zwei in dem Deckel des genannten Gefässes befestigte Glasröhren und durch eine dritte solche Glasröhre ging das Thermometer, welches dazu diente, die Temperaturerhöhung in der Flüssigkeit zu bestimmen. An den beiden zuerst erwähnten Glasröhren hing das Calorimeter inmitten eines zweiten Gefässes, welches seinerseits wiederum in einem dritten mit Wasser gefüllten Gefässe hing. Das letztere Gefäss endlich stand excentrisch in einer mit Wasser gefüllten Wanne, die während des Versuches um eine verticale Axe hin und her gedreht wurde, so dass die Flüssigkeiten in Strömung gebracht wurden. Die Temperatur des zweiten Gefässes oder der Umgebung des Calorimeters wurde durch ein zweites Thermometer gemessen, welches in das Wasser des dritten Gefässes eingetaucht war.

Zur Bestimmung der Intensität des angewandten Stromes wurde in die galvanische Leitung ein ringförmiger Multiplicator eingeschaltet und die Einwirkung des letzteren auf eine Magnetometer-Nadel ermittelt. Die Windungen des Multiplicators waren senkrecht und mit dem magnetischen Meridiane parallel, und seine Axe ging durch die Mitte der Magnetometer-Nadel. Unter diesen Verhältnissen lässt sich aus den Daten der Beobachtung auf die Intensität des Stromes mit Hülfe der folgenden Formeln schliessen:

$$tang\, v = \frac{2P}{R^3}\left(1 + \frac{\eta}{R^2}\right), \quad P = \frac{i n r^2 \pi}{\sqrt{2}\,(1+k)\,H}.$$

Hier bedeutet v die durch den Strom bewirkte Ablenkung der

Magnetometer-Nadel, i die Intensität des Stromes, H die horizontale Componente des Erdmagnetismus, r den mittleren Radius der Multiplicator-Windungen, n die Anzahl dieser Windungen, R die Entfernung der Mitte des Multiplicators von der Mitte der Magnetometer-Nadel, k den Quotienten aus dem Torsionsmoment des Aufhängungsfadens und der horizontalen Componente des Gegenpaares, welches die Wirkung des Erdmagnetismus auf die Nadel darstellt. Endlich bedeutet η eine Constante, die dadurch ermittelt wird, dass man für verschiedene Entfernungen des Multiplicators und des Magnetometers bei einem möglichst constanten Strome die Ablenkungen der Nadel bestimmt und zugleich mittelst einer Tangentenboussole die Intensitäten des Stromes vergleicht. Bei den Erwärmungsversuchen wurde übrigens die Intensität des Stromes mittelst eines Rheostaten auf nahe gleicher Höhe erhalten. Als Einheit des Stromes nahm von Quintus Icilius Weber's elektromagnetische Stromeinheit. Dieselbe verhält sich zu der von uns gewählten Einheit wie $\frac{\sqrt{2}}{100}$ zu 1. (S. Kohlrausch und Weber. Elektrodyn. Maassbest.)

Was den Widerstand des eingeschalteten Leiters betrifft, so wurde für denselben das Mittel aus den beiden Werthen genommen, welche sich durch Vergleichung mit dem Jacobi'schen Widerstands-Etalon vor und nach den Erwärmungs-Versuchen ergaben. Jener Etalon ist ein Kupferdraht von $761{,}975^{cm}$ Länge und $0{,}0667^{cm}$ Dicke und sein Widerstand ist gleich $598 . 10^7$ der Weber'schen absoluten Widerstandseinheiten. Die Weber-sche Widerstandseinheit verhält sich aber zu der von uns gewählten Widerstandseinheit wie $\frac{4\lambda^2}{10}$ zu 1. (S. Weber: Elektrodyn. Maassbest., insbesondere Widerstandsmessungen.) Es wurde endlich auch noch die Zunahme des Widerstandes der angewandten Drähte mit wachsender Temperatur unter der Annahme ermittelt, dass jene innerhalb der in Betracht kommenden Grenzen mit der Zunahme der Temperatur proportional sei.

In dem einzelnen Versuche beobachtete nun von Quintus Icilius während einer Stunde von zwei zu zwei Minuten den Stand des im Calorimeter befindlichen Thermometers und er-

mittelte den entsprechenden Stand der Magnetometer-Nadel. Vor und nach dem Versuche beobachtete er ferner auch das zweite Thermometer und die Gleichgewichtslage der Nadel.

Wir theilen in der folgenden Tabelle einige der Resultate mit, welche von Quintus Icilius in zwei Beobachtungsreihen erhielt. Das angewandte Calorimeter wog 247,366 Gramm und sein calorimetrischer Wasserwerth, wie er sich aus sechs mit zwei verschieden schweren Calorimetern angestellten Versuchsreihen mittelbar ergab, betrug 34,438. Die mittlere der aufgeführten Beobachtungen entspricht der Mitte der Beobachtungszeit. Es ist aber in der Tabelle durch t die in Secunden ausgedrückte Zeit, durch u die Temperatur des ersten Thermometers bezeichnet. Für die Temperaturen u' des zweiten Thermometers bei der ersten und letzten Beobachtung sind, wie solches ohne erheblichen Fehler gestattet ist, die Temperaturen der Umgebung des Thermometers vor und nach der ganzen Beobachtungsreihe gesetzt.

Ferner bedeutet L die Quantität des ins Calorimeter eingefüllten Wassers, i die mittlere Intensität des Stromes für die ganze Beobachtungsreihe, w_0 den mittleren Widerstand des Leiters vor und nach der Erwärmung, beide Grössen in den von uns gewählten Einheiten ausgedrückt. Endlich ist durch θ der Coefficient der Temperatur in der Formel $w_0\ (1 + \theta(u - u_0))$ für den der Temperatur u entsprechenden Widerstand bezeichnet.

$t:60$	u	u'	L	i^2	$w_0 : 4\lambda^2$	θ
0	8,48	7,00				
14	13,60					
26	17,60		325,408	0,129834	$14087 . 10^5$	0,00340
40	21,92					
52	25,24	7,18				
0	9,58	8,00				
14	14,60					
26	18,52		341,357	0,114628	$16841 . 10^5$	0,00355
40	22,64					
52	25,90	8,06				

Um die obigen Ergebnisse des Versuches mit der Theorie zu vergleichen, bezeichnen wir durch du das dem Zeitdifferential dt entsprechende Wachsthum der Temperatur des Calorimeters, durch dC die in derselben Zeit im Leiter entwickelte Wärmemenge, durch K den calorimetrischen Wasserwerth des Calorimeters und durch β eine gewisse für die einzelne Beobachtungsreihe constante und von der äusseren Leitung am Calorimeter abhängige Grösse. Alsdann ist:

$$du = \frac{dC}{K+L} - \beta\,(u-u')\,dt,$$

und nach der theoretischen Formel für die Wärmeentwicklung im linearen Strome ist:

$$dC = \frac{i^2 w}{4\lambda^2 . 2gA}\,dt = \frac{i^2 w_0}{4\lambda^2 . 2gA}\,[1+\theta\,(u-u_0)]\,dt,$$

wenn noch durch u_0 der Werth von u für $t=0$ bezeichnet wird. Setzt man ferner abkürzend

$$1.\quad \frac{i^2 w_0}{4\lambda^2 . 2gA(K+L)} = \alpha,$$

so ist also auch:

$$\frac{du}{dt} = \alpha\,[1+\theta\,(u-u_0)] - \beta\,(u-u').$$

Ohne erheblichen Fehler kann hier bei den zu betrachtenden Versuchen im ersten Gliede rechterhand u' für u_0 gesetzt werden, wodurch man erhält:

$$\frac{du}{dt} = \alpha - \varepsilon\,(u-u') \text{ für } \varepsilon = \beta - \alpha\theta.$$

Man bemerke ferner, dass es gestattet sein wird, die Aenderungen der Temperatur u' als proportional mit der Zeit anzunehmen, oder zu setzen:

$$u' = u_0' + \sigma t,$$

da sich denn σ durch die Anfangs- und Endtemperatur des zweiten Thermometers bestimmt. Hierdurch wird die letzte Differentialgleichung linear. Ihre Integration und die gehörige Bestimmung der Integrations-Constante liefert, wenn noch die Differenz $u_0 - u_0'$, d. i. der Ueberschuss der Temperatur des Calorimeters über die seiner Umgebung für $t=0$, durch δ bezeichnet wird:

$$2.\ u = u' + \delta + \left(\frac{\alpha - \sigma}{\varepsilon} - \delta\right)(1 - e^{-\varepsilon t}).$$

Diese Gleichung stellt wirklich den Verlauf der Temperatur des Calorimeters innerhalb des Intervalls der mitgetheilten Beobachtungen in befriedigender Weise dar, wenn man z. B. die Constanten in beiden Versuchen mittelst der ersten, mittleren und letzten Beobachtung bestimmt. Man erhält so die folgenden Werthe für α, β und ε, sowie für A, welches sich aus dem gefundenen Werthe von α, den Werthen von i, w_0, K, L und dem bekannten Werthe von g aus der Gleichung 1. finden lässt:

α	β	ε	A
0,006545	0,000137	0,000115	39600
0,006494	0,000146	0,000123	40300

Aus sämmtlichen Versuchen, in welchen Wasser zur Füllung des Calorimeters angewandt wurde, erhielt von Quintus Icilius für A den Werth 40000, hierbei nur die drei ersten Ziffern in Betracht genommen. Die Uebereinstimmung dieses Werthes mit dem Werthe 42400, wie er sich für A unter Anderem aus Versuchen über die Reibungswärme ergeben hat, ist hinreichend gross, um in dem Ergebniss der oben erörterten Versuche eine Bestätigung der theoretischen Formel erblicken zu lassen.

Litteratur. Clausius. Ueber die bei einem stationären Strome in dem Leiter gethane Arbeit und erzeugte Wärme. Pogg. Ann. LXXXVII.

3. Von der stationären elektrischen Strömung in einer ebenen Platte von constanter verschwindender Dicke.

a. Allgemeine Betrachtungen.

Bei der stationären Strömung der Elektricität in einer ebenen Platte von constanter verschwindender Dicke kann das Potential V der ruhenden Elektricität offenbar als Function von zwei in der Ebene der Platte liegenden Coordinaten angesehen werden. Man hat daher, unter x und y rechtwinklige, in der Platte liegende Coordinaten verstanden:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} = 0,$$

oder, wenn die Polarcoordinaten t und φ eingeführt werden:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{1}{t^2} \cdot \frac{d^2 V}{d\varphi^2} = 0.$$

Durch Integration ergiebt sich, unter P und Q zwei willkürliche Functionen und unter i die Quadratwurzel aus der negativen Einheit verstanden:

$$\begin{aligned} V &= P(x+yi) + Q(x-yi) \\ &= P(te^{\varphi i}) + Q(te^{-\varphi i}). \end{aligned}$$

An die Stelle der Gleichgewichtsflächen treten bei der ebenen Platte Gleichgewichtscurven, für welche man hat:

$$V = const.$$

Die Strömungscurven werden durch folgende Differentialgleichung bestimmt:

$$dx : dy = \frac{dV}{dx} : \frac{dV}{dy}.$$

Wir werden uns in der Folge auf solche Fälle beschränken, wo die positive Strömung durch einen Punkt, die positive Elektrode, in die Platte eindringt und durch einen zweiten Punkt, die negative Elektrode, aus der Platte heraustritt. Alsdann wird die Form des Potentiales V weiterhin durch die Bedingung bestimmt, dass der Rand der Platte eine Strömungscurve sein muss und dass alle Strömungscurven durch die Elektroden

hindurchgehen müssen. Unendlich nahe an einer Elektrode sind daher die Gleichgewichtscurven concentrische Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt in die Elektrode fällt, so dass hier, wie sich aus dem Obigen leicht ergiebt, der veränderliche Theil des Potentiales die Form $C \log r$ hat, unter C eine Constante und unter r die Entfernung von der Elektrode verstanden.

Wenn für die Strömung in der Platte, wie wir stets unterstellen wollen, die Elektricität, welche ausserhalb der Platte in der zur Erregung der Strömung dienenden Kette auftritt, ausser Acht zu lassen ist, so hat V die Form $\int \log r\, dq$, wo dq das Element von fictiven elektrischen Massen bedeutet, die in den Elektrodenpunkten und am Rande der Platte liegen, und wo ferner r die Entfernung vom Elemente darstellt. Es ergiebt sich dies wie folgt. Man denke sich einen beiderseits unendlich langen Cylinder, von welchem die Platte ein Querschnitt ist. Das Potential V für die Strömung in der Platte bestimmt alsdann offenbar auch eine stationäre Strömung in dem Cylinder, wenn die Punkte des letzteren auf ein rechtwinkliges Raumcoordinatensystem, dessen z-Axe auf der Platte senkrecht steht, bezogen werden, und es leuchtet überdies ein, dass die Gleichgewichtsflächen für jene räumliche Strömung cylindrisch sind, auf der Platte senkrecht stehen und diese in den Gleichgewichtscurven für die Strömung in der Ebene schneiden. Die elektrischen Massen des Potentiales V sind jetzt zu suchen auf der Grenzfläche des Cylinders, welche durch den Rand der Platte geht, sowie auf den geraden Linien, welche auf jener in den Elektrodenpunkten senkrecht stehen, und die Verbreitung der Elektricität ist auf jeder Seite der Grenzfläche und auf jeder der letztgenannten Geraden eine gleichförmige. Es hat aber der veränderliche Theil des Potentiales elektrischer Massen, welche auf einer beiderseits ins Unendliche sich erstreckenden Geraden gleichförmig verbreitet sind, die Form $C \log r$, wo C eine Constante, r die Entfernung von der Geraden bedeutet, und hieraus erhellt dann die Richtigkeit der gemachten Bemerkung.

Die obigen Ergebnisse sollen jetzt auf die Bestimmung der elektrischen Strömung in einer allseitig unbegrenzten, sowie in einer kreisförmigen Platte angewandt werden.

b. Stationäre elektrische Strömung in einer ebenen, allseitig unbegrenzten Platte.

Bei einer ebenen Platte, die sich nach allen Seiten hin ins Unendliche erstreckt, kommen offenbar nur die fictiven elektrischen Massen in den Elektrodenpunkten in Betracht. Bezeichnen wir daher durch r' die Entfernung von der positiven, durch r'' die von der negativen Elektrode, und bedeuten C' und C'' zwei Constanten, so erhalten wir für den veränderlichen Theil des Potentiales:

$$V = C' \log r' + C'' \log r''.$$

Die beiden Constanten C' und C'' müssen einander entgegengesetzt gleich sein. Man beschreibe nämlich mit dem verschwindend kleinen Radius σ um jede Elektrode einen Kreis. Ferner bezeichne man durch δ die Dicke und durch $\varkappa$ den Fortpflanzungscoefficienten der Platte. Alsdann ergiebt sich für die positive Elektricität, welche während der Zeiteinheit aus dem Kreise der positiven Elektrode heraustritt, sowie für die positive Elektricität, welche in gleicher Zeit in den Kreis der negativen Elektrode hineintritt, bezüglich:

$$-\, 2\delta\varkappa\sigma\pi \frac{dV}{dr'} \text{ für } r' = \sigma, \quad +\, 2\delta\varkappa\sigma\pi \frac{dV}{dr''} \text{ für } r'' = \sigma.$$

Diese beiden Quanta müssen einander gleich sein. Daher ist:

$$V = C \log \frac{r'}{r''},$$

wo, unter J das positive Quantum verstanden, welches während der Zeiteinheit durch die positive Elektrode in die Platte eindringt, zu setzen ist:

$$C = -\frac{J}{2\delta\varkappa\pi}.$$

Aus der Form des Potentiales ersehen wir, dass das System der Gleichgewichtscurven aus den Kreisen besteht, deren Mittelpunkte auf der Verbindungslinie der Elektroden liegen, und

welche diese Punkte harmonisch trennen. Jenes System von Kreisen wird bekanntlich von den Kreisen, welche durch die Elektroden gelegt werden können, rechtwinklig geschnitten; letztere sind also die Strömungscurven.

Verbindet man zwei Punkte des centralen Theiles einer Platte von constanter geringer Dicke durch dünne Drähte mit den Polen einer galvanischen Kette in der Art, dass die gegenseitige Entfernung der Drahtenden sehr klein wird in Vergleich mit ihren Entfernungen vom Rande, so wird die Strömung in der Platte mit Ausschluss der am Rande und in der Nähe der Drahtenden gelegenen Theile nahezu mit der oben bestimmten Strömung übereinstimmen. Hierbei wird die in dem Ausdrucke für C auftretende Grösse J dem Stromquantum in den Elektrodendrähten gleichzusetzen sein. Wir wollen annehmen, eine merkliche Abweichung von der theoretischen Strömung trete in der Nähe der Elektroden erst ein für Punkte, deren Entfernung von einer Elektrode kleiner als die sehr kleine Grösse τ ist. Bezeichnen wir dann ferner die elektromotorische Kraft der Kette durch E, den Widerstand ausserhalb der Platte durch W und den merklich constanten Werth, welchen das Potential in der Entfernung τ von einer Elektrode aufweist, bezüglich durch V' und V'', so kommt:

$$JW = V'' - V' + E.$$

Hieraus ergiebt sich nach Substitution der Ausdrücke für V' und V'':

$$J = \frac{E}{W - \frac{\log \tau}{\delta \varkappa \pi}}.$$

Der Widerstand der Platte ist also gleich $-\frac{\log \tau}{\delta \varkappa \pi}$.

Zusätzlich möge noch der Fall erörtert werden, wo die Beschaffenheit und Dicke der Platte innerhalb einer Gleichgewichtscurve von der in dem übrigen Theile verschieden ist. Hier treten offenbar dieselben Strömungscurven wie in dem oben betrachteten Falle auf, so dass auch der veränderliche Theil des Potentiales in beiden Theilen der Platte dieselbe Form, aber mit verschiedenen Constanten erlangt. Es sei V_1 das Potential in dem kreisförmigen, V_2 das Potential in dem übrigen

Theile der Platte, und es liege in jenem die positive, in diesem die negative Elektrode. Alsdann ist:

$$V_1 = B_1 + C_1 \log \frac{r'}{r''},\quad V_2 = B_2 + C_2 \log \frac{r'}{r''}.$$

Bezeichnet man nun ferner durch $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Fortpflanzungscoefficienten, durch δ_1 und δ_2 die Dicken der beiden Theile der Platte und durch ε_1 und ε_2 die Molecularconstanten für ihren Contact, so liefern die Bedingungen für die Grenzcurve:

$$B_1 + \varepsilon_1 = B_2 + \varepsilon_2,\quad C_1 : C_2 = \delta_2 \varkappa_2 : \delta_1 \varkappa_1.$$

Die veränderlichen Theile der Potentiale V_1 und V_2 werden vollständig bestimmt, sobald das Stromquantum der Kette, in welche die Platte eingeschaltet ist, gegeben ist. Es kommt nämlich:

$$C_1 = -\frac{J}{2\delta_1 \varkappa_1 \pi},\quad C_2 = -\frac{J}{2\delta_2 \varkappa_2 \pi}.$$

Für den Widerstand der ganzen Platte findet man in erster Annäherung den Werth $-\dfrac{\log \tau}{2\pi}\left(\dfrac{1}{\delta_1 \varkappa_1} + \dfrac{1}{\delta_2 \varkappa_2}\right)$.

Wenn einer der Fortpflanzungscoefficienten in Vergleich mit dem anderen sehr klein ist, so wird die Strömung in dem schlechter leitenden Theile der Platte innerhalb gewisser Grenzen von der Lage der Elektrode in dem besser leitenden Theile unabhängig. Dies ergiebt sich aus der Relation, welche zwischen jenen Coefficienten und den Winkeln zwischen den Stromrichtungen und der Normale der Grenzcurve für die Punkte der letzteren besteht.

c. Stationäre elektrische Strömung in einer kreisförmigen Platte.

Der veränderliche Theil des Potentiales, welches die stationäre elektrische Strömung in einer kreisförmigen Platte bestimmt, hat die Form:

$$V = C' \log r' + C'' \log r'' + \int \log r \, dq,$$

wo C', C'', r' und r'' dieselbe Bedeutung wie früher haben, dq

aber das Element einer fictiven elektrischen Ladung des Randes und r die Entfernung von dq darstellt.

Die Function $\int log\, r\, dq$ lässt sich in ähnlicher Weise wie das Potential der elektrischen Ladung einer Kugelfläche entwickeln. Es seien nämlich in einem Polarcoordinatensystem, dessen Pol im Mittelpunkte der Platte liegt, t, φ und t', φ' die Coordinaten zweier Punkte, deren Entfernung r ist. Man findet dann, wenn $t > t'$ ist, und die Differenz $\varphi - \varphi'$ durch δ bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} log\, r &= log \sqrt{t^2 + t'^2 - 2tt' \cos\delta} \\ &= log\, t + l_1 \left(\frac{t'}{t}\right) + l_2 \left(\frac{t'}{t}\right)^2 + l_3 \left(\frac{t'}{t}\right)^3 + \cdots, \end{aligned}$$

wo zu setzen ist:

$$l_1 = -\cos\delta, \quad l_2 = \tfrac{1}{2} - \cos\delta^2, \quad l_3 = \cos\delta - \tfrac{4}{3}\cos\delta^3 \text{ u. s. f.}$$

Die Coefficienten l_n, rationale ganze Functionen von $\cos\varphi \cos\varphi'$ und $\sin\varphi \sin\varphi'$, genügen der Differentialgleichung:

$$D \ldots \frac{d^2 l_n}{d\varphi^2} + n^2 l_n = 0,$$

d. h. sie haben die Form:

$$l_n = a \sin(n\varphi + b).$$

Vertauscht man in der Entwickelung für $log\, r$ die Coordinaten t, φ und t', φ' mit einander, so erhält man eine convergente Reihe für den Fall, dass $t' > t$ ist. Die Coefficienten l_n bleiben dieselben, an die Stelle des ersten Gliedes tritt aber jetzt $log\, t'$.

Man beschreibe nun um den Pol als Mittelpunkt mit dem Radius R eine Kreislinie und belege dieselbe mit elektrischer Materie. Auf das Element des Randes mit der Winkelcoordinate φ' komme so das Quantum dq, dessen Liniendichtigkeit ϱ sei, zu liegen. Alsdann hat man für jeden Punkt t, φ ausserhalb des Kreises:

$$\begin{aligned} \int log\, r\, dq &= R \int_0^{2\pi} log \sqrt{R^2 + t^2 - 2Rt\cos\delta} \,.\, \varrho\, d\varphi' \\ &= R\, log\, t \int_0^{2\pi} \varrho\, d\varphi' + L_1 \left(\frac{R}{t}\right) + L_2 \left(\frac{R}{t}\right)^2 + L_3 \left(\frac{R}{t}\right)^3 + \cdots, \end{aligned}$$

wo zu setzen ist:

$$L_n = R \int_0^{2\pi} l_n \varrho \, d\varphi',$$

so dass die Coefficienten L_n auch der Differentialgleichung D genügen.

Ferner ergiebt sich für jeden innerhalb des Kreises gelegenen Punkt:

$$\int log\, r\, dq = R\, log\, R \int_0^{2\pi} \varrho \, d\varphi' + L_1\left(\frac{t}{R}\right) + L_2\left(\frac{t}{R}\right)^2 + L_3\left(\frac{t}{R}\right)^3 + \cdots$$

Mit Rücksicht auf die letzte Entwickelung und indem wir stets nur den veränderlichen Theil des Potentiales V ins Auge fassen, können wir schreiben, unter R nunmehr den Radius der Platte verstanden:

$$V = C' log\, r' + C'' log\, r'' + \sum_1^\infty L_n \left(\frac{t}{R}\right)^n.$$

Die weitere Bestimmung des Potentiales ergiebt sich aus der Bedingung, dass der Rand der Platte eine Stromcurve sein, oder dass $\frac{dV}{dt}$ am Rande verschwinden muss. Hieraus findet man, wenn die Leitstrahlen der Elektroden durch t' und t'' und die Coefficienten in den Entwickelungen von $log\, r'$ und $log\, r''$ nach steigenden Potenzen von $t' : t$ und $t'' : t$ durch l_n' und l_n'' bezeichnet werden:

$$L_n = \frac{C' l_n' t'^n}{R^n} + \frac{C'' l_n'' t''^n}{R^n}.$$

Es ist mithin:

$$\sum_1^\infty L_n \left(\frac{t}{R}\right)^n = C' \sum_1^\infty l_n' \left(\frac{tt'}{R^2}\right)^n + C'' \sum_1^\infty l_n'' \left(\frac{tt''}{R^2}\right)^n.$$

Um den letzten Ausdruck zu vereinfachen, führen wir die beiden Punkte ein, welche, auf den Radien der Elektroden gelegen, von diesen durch den Randkreis harmonisch getrennt werden. Die Leitstrahlen jener Punkte seien bezüglich t_1 und t_2 und die Entfernungen von denselben mögen durch s' und s'' bezeichnet werden. Dann ist:

$$\sum_1^\infty l_n' \left(\frac{tt'}{R^2}\right)^n = \sum_1^\infty l_n' \left(\frac{t}{t_1}\right)^n = log \frac{s'}{t_1},$$

$$\sum_1^\infty l_n''\left(\frac{tt''}{R^2}\right)^n = \sum_1^\infty l_n''\left(\frac{t}{t_2}\right)^n = log\frac{s''}{t_2}\cdot$$

Hiernach können wir, wiederum die constanten Summanden des Potentiales ausser Acht lassend, schreiben:

$$V = C' log r's' + C'' log r''s''.$$

Was die Constanten C' und C'' betrifft, so ergiebt sich auf analoge Weise, wie bei der unbegrenzten Platte, dass sie stets entgegengesetzt gleich sein müssen; es ist daher:

$$V = C log\frac{r's'}{r''s''}\cdot$$

Die Constante C drückt sich in gleicher Weise wie bei der unbegrenzten Platte und zwar für jede Lage der Elektroden durch das Stromquantum, die Dicke der Platte und den Fortpflanzungscoefficienten aus.

Mittelst des gefundenen Ausdruckes für das Potential lässt sich der Widerstand der Platte auf demselben Wege wie bei der unbegrenzten Platte ermitteln. Man findet, dass er in erster Annäherung mit dem der unbegrenzten Platte zusammenfällt, wenn beide Elektroden innerhalb des Randkreises liegen, dass er anderthalbmal so gross ist, wenn eine der Elektroden auf dem Rande liegt, und dass er endlich doppelt so gross ist, wenn beide Elektroden auf dem Rande liegen.

Wenn die Elektroden auf dem Rande liegen, so fallen die Centra der s' und s'' mit ihnen zusammen, und ergiebt sich daher:

$$V = 2 C log\frac{r'}{r''}\cdot$$

In diesem Falle ist also die Art der Strömung in der Platte dieselbe, wie in einer unbegrenzten Platte, d. h. die Elektricität strömt in kreisförmigen Bahnen von der einen Elektrode zur andern. Dies Ergebniss, welches sich auch leicht aus den Gesetzen für die unbegrenzte Platte hätte herleiten lassen, wird durch die Versuche bestätigt, welche Kirchhoff (über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige. Pogg. Ann. LXIV. Nachtrag zu dem Aufsatze: Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes etc. Pogg. Ann. LXVII.) über die elektrische Strömung in einer Kreisplatte angestellt hat.

Unter Anderem untersuchte der genannte Forscher die elektrische Strömung in einer dünnen Kreisscheibe von Kupfer, in welche die Elektricität durch einen dünnen, am Rande angelötheten Kupferdraht eintrat, um durch einen zweiten ebensolchen Draht herauszuströmen. Der Durchmesser der Scheibe betrug 1 Fuss und die Elektroden waren $^3/_4$ Fuss von einander entfernt. Um erstlich die Gleichgewichtscurven zu bestimmen, setzte er das eine Ende des Drahtes eines Multiplicators auf einen beliebigen Punkt der Scheibe und suchte mit dem anderen Ende solche weitere Punkte auf, dass die Nadel des Multiplicators keine Ablenkung zeigte. In den so gefundenen Punkten hat das Potential denselben Werth wie in dem ersterwähnten festen Punkte, und alle diese Punkte liegen also auf einer Gleichgewichtscurve. Wenn man nämlich die Enden eines Multiplicatordrahtes auf irgend zwei Punkte der Platte aufsetzt, so wird, wofern jener Draht sehr dünn ist, der veränderliche Theil des Potentiales und die Strömung in der Platte nicht merklich geändert. Die Stärke des elektrischen Stromes aber, welcher durch den Multiplicatordraht abgezweigt wird, ist der Differenz der Potentialwerthe für das eine und das andere Drahtende proportional und verschwindet folglich nur dann, wenn jene Enden auf einer und derselben Gleichgewichtscurve aufstehen.

Die auf die angegebene Weise gefundenen Gleichgewichtscurven weichen nur sehr wenig von den theoretischen ab, d. h. von den Kreisen, welche die Elektrodenpunkte harmonisch trennen und deren Mittelpunkte mit letzteren in gerader Linie liegen. In der folgenden Tabelle sind die in Zollen ausgedrückten Radien solcher Kreise angegeben, welche sich den einzelnen Gruppen von beobachteten Punkten gleichen Potentialwerthes anschliessen, ferner die Entfernungen der einzelnen Punkte von den jedesmaligen Kreisen.

Radius.	Entfernung der einzelnen Punkte.
1,14	+ 0,01, − 0,01, − 0,01, + 0,01.
2,78	0, 0, 0, 0, 0, + 0,01.
6,04	+ 0,01, + 0,01, + 0,01, 0, − 0,01, − 0,01, − 0,03, − 0,02, 0, − 0,04, + 0,07.
∞	+ 0,02, + 0,02, 0, − 0,02, − 0,03, 0, 0, + 0,02, + 0,04, + 0,06, + 0,03, 0.
5,90	− 0,01, − 0,02, − 0,01, 0, 0, 0, + 0,03.
2,85	0, − 0,01, − 0,01, − 0,01, 0, − 0,02, + 0,07.
1,17	0, 0, − 0,01, + 0,01

Um die Form von V ferner noch zu verificiren, bestimmte Kirchhoff auf einigen Strömungslinien Punktpaare mit gleicher Potentialdifferenz. Er schaltete nämlich in den Multiplicatordraht eine schwache Thermokette, aus Kupfer und Zink bestehend, ein, setzte die Enden des gedachten Drahtes auf eine Strömungscurve so auf, dass der durch den Draht abgezweigte Strom dem thermoelektrischen Strome der Richtung nach entgegengesetzt war, und während das eine Ende des Drahtes fest blieb, wurde das andere längs der Strömungslinie so lange verschoben, bis sich die beiden eben erwähnten Ströme aufhoben. Sobald letzteres eingetreten war, kam die Differenz der Potentialwerthe in den beiden berührten Punkten der elektromotorischen Kraft der Thermokette gleich. Bezeichnen wir durch r_1', r_1'' und r_2', r_2'' die Entfernungen zweier auf die angegebene Weise gefundener Punkte von dem einen und anderen Elektrodenpunkte, und durch V_1 und V_2 die bezüglichen Potentialwerthe, so ist der Theorie gemäss:

$$V_1 = 2\,C\,log\,\frac{r_1'}{r_1''}, \qquad V_2 = 2\,C\,log\,\frac{r_2'}{r_2''},$$

folglich auch:

$$V_1 - V_2 = 2\,C\,log\,\frac{r_1'\,r_2''}{r_1''\,r_2'}.$$

Für Punktpaare gleicher Potentialdifferenz muss also der Quotient $r_1'\,r_2'' : r_1''\,r_2'$ stets constant bleiben. In wie weit nun diese Relation durch die Versuche Kirchhoff's bestätigt wird, lassen die beiden folgenden Tafeln ersehen. Die erste bezieht sich

auf die geradlinige Strömungscurve. Für dieselbe ist der 39ste Theil der Entfernung beider Elektrodenpunkte die Einheit der beobachteten Distanzen r_1' und r_2'. Die zweite Tafel bezieht sich auf eine kreisförmige Strömungscurve. Der Radius derselben betrug 5 Zoll, ihr Centriwinkel also, der grösser als 180° war, 231° 41′. Die Columnen φ_1' und φ_2' enthalten die Bogenentfernungen je zweier zu einander gehöriger Punkte gleicher Potentialdifferenz von einem der Elektrodenpunkte, und diese Entfernungen sind in Theilen der ganzen Strömungscurve ausgedrückt. Es ist leicht, hieraus und aus der Entfernung der Elektrodenpunkte die Distanzen r_1'', r_2'' und den in der letzten Columne stehenden Quotienten $r_1' r_2'' : r_1'' r_2'$ abzuleiten.

Erste Tafel.

r_1'	r_2'	$r_1' r_2'' : r_1'' r_2'$
5	10,4	0,40
10	17,3	0,43
15	22,8	0,44
20	28	0,41
25	31,5	0,43
30		0,45

Zweite Tafel.

φ_1'	φ_2'	$r_1' r_2'' : r_1'' r_2'$
0,1	0,254	0,42
0,2	0,483	0,41
0,3	0,629	0,41
0,4	0,709	0,43
0,5	0,787	0,42
0,6	0,840	0,41
0,7	0,8875	0,40
0,8	0,920	0,43

4. Von der stationären elektrischen Strömung in einem allseitig unbegrenzten Raume.

Zwei dünne Metalldrähte seien in einen Leiter so eingelassen, dass sie mit Ausnahme ihrer Endpunkte von dem Leiter durch eine sehr dünne isolirende Schicht getrennt sind, und dass die Entfernung jener Endpunkte von einander sehr klein ist in Vergleich mit ihren Entfernungen von der Oberfläche des Leiters. Werden alsdann die aus dem Leiter hervorragenden Theile der Drähte mit den Polen einer galvanischen Kette verbunden, so entsteht im Inneren des Leiters eine stationäre Strömung der Elektricität von dem einen Drahtende zum anderen. Von der ruhenden Elektricität, welche bei dieser Strömung auftritt, kommen in erster Annäherung nur die in den Elektroden liegenden Massen in Betracht. Die Strömung wird also in diesem Falle nahezu dieselbe sein, wie wenn eine elektrische Strömung, von einer punktförmigen Elektrode in einem allseitig unbegrenzten, mit leitender Materie erfüllten Raume ausgehend, sich bis zu einer zweiten punktförmigen Elektrode fortsetzt; nur in der Nähe der Oberfläche des Leiters und in der Nähe der eingelassenen Drähte wird diese Uebereinstimmung nicht mehr stattfinden.

Bei der Strömung im unendlichen Raume und bei punktförmigen Elektroden sind die elektrischen Massen in den Elektrodenpunkten entgegengesetzt gleich und treten ausser ihnen in aller Strenge keine weiteren ruhenden elektrischen Massen auf. Hier hat man also für den veränderlichen Theil des Potentiales, wenn r' und r'' die Entfernungen von den Elektroden sind und C eine Constante bedeutet:

$$V = C\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right).$$

Als Strömungscurven treten hiernach die magnetischen Curven auf, welche sich zwei entgegengesetzt gleichen, in den Elektroden gelegenen Magnetpolen zuordnen.

Was die Bestimmung der Constanten betrifft, so denke man sich um die positive Elektrode als Mittelpunkt eine Kugel-

fläche mit dem verschwindend kleinen Radius σ gelegt. Das Quantum positiver Elektricität, welches durch diese Fläche während der Zeiteinheit hindurchgeht, drückt sich, unter $\varkappa$ den Fortpflanzungscoefficienten verstanden, wie folgt aus:

$$-4\varkappa\sigma^2\pi\,\frac{dV}{dr'},\ \text{für}\ r'=\sigma.$$

Hiernach bestimmt sich die Constante C, sobald jenes Quantum gegeben ist. Es kommt, wenn letzteres durch J bezeichnet wird:

$$C=\frac{J}{4\varkappa\pi}.$$

Zu dem Falle eines Leiters mit endlichen Dimensionen zurückkehrend, wollen wir unterstellen, es stimme die Strömung in dem centralen Theile bis zu der sehr kleinen Entfernung τ von der einen und der anderen Elektrode mit der Strömung im unendlichen Raume merklich überein. Alsdann ergiebt sich in erster Annäherung für den Widerstand des Leiters der Werth $\frac{1}{2\varkappa\tau\pi}$. Er verhält sich zu dem Widerstande eines Drahtes von dem Stoffe des Leiters, von der Länge 1 und dem Halbmesser τ wie $\frac{1}{2}\tau:1$.

Die obigen Resultate können unter anderen theilweise bei einer punktförmigen und einer plattenförmigen metallischen Elektrode, welche einander innerhalb eines Elektrolyten gegenübergestellt werden, in Anwendung kommen. Wenn nämlich die Entfernung der punktförmigen Elektrode von der plattenförmigen sehr klein ist in Vergleich mit den Dimensionen der letzteren und mit den Entfernungen von der Oberfläche des Elektrolyten, so kann das Potential in der zugekehrten Fläche der Platte bis zu einer gewissen Entfernung von der anderen Elektrode annähernd als constant betrachtet werden. Bis zu einer gewissen Entfernung von dem aus der punktförmigen Elektrode auf die Platte herabgelassenen Lothe werden daher die Strömungscurven nahezu mit den magnetischen Curven übereinstimmen, von deren Polen der eine in der punktförmigen Elektrode, der andere aber mit jenem in Bezug auf die zugekehrte Ebene der plattenförmigen Elektrode symmetrisch gelegen ist.

5. Von der stationären elektrischen Strömung in einem sphärischen Leiter.

Da bei der stationären elektrischen Strömung in einem sphärischen Leiter für den Fall zweier punktförmigen Elektroden die ruhende Elektricität aus zwei punktförmigen, in den Elektroden gelegenen elektrischen Massen und einer elektrischen Ladung der Oberfläche besteht, das Potential der letzteren aber mittelst der Kugelfunctionen dargestellt werden kann, so ergiebt sich für diese Strömung sofort eine nähere Bestimmung der Form des Potentiales V. Es seien nämlich t, φ, θ räumliche Polarcoordinaten, deren Pol im Centrum des Leiters liegt, und deren Fundamentalebene durch beide Elektroden hindurchgeht. Die Coordinaten der positiven und negativen Elektrode seien bezüglich t', φ' und t'', φ'' und die Entfernungen von ihnen r' und r''. Ferner mögen C' und C'' zwei Constanten, R den Radius der Oberfläche bedeuten. Alsdann hat man nach den gemachten Bemerkungen, wenn wir von dem constanten Summanden des Potentiales absehen:

$$V = \frac{C'}{r'} + \frac{C''}{r''} + \sum_1^\infty P_n \left(\frac{t}{R}\right)^n,$$

wo die Coefficienten P_n, die Laplace'schen Kugelfunctionen, rationale ganze Functionen von $\cos\varphi$, $\sin\varphi \sin\theta$ und $\sin\varphi \cos\theta$ sind.

Von den Constanten des Potentiales bestimmen sich zunächst die in den Kugelfunctionen auftretenden durch die Bedingung, dass an der Oberfläche die Strömungscurven ganz in letztere fallen, oder dass $\frac{dV}{dt}$ in allen Punkten der Oberfläche verschwinden muss. Um diese Bedingung auszudrücken, wenden wir die folgenden Entwickelungen für die beiden ersten Glieder des Potentiales an:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{t} \sum_0^\infty p_n' \left(\frac{t'}{t}\right)^n, \quad \frac{1}{r''} = \frac{1}{t} \sum_0^\infty p_n'' \left(\frac{t''}{t}\right)^n,$$

wo p_n' und p_n'' die Coefficienten der Entwickelungen von $(1 - 2t\cos\delta' + t^2)^{-1/2}$ und $(1 - 2t\cos\delta'' + t^2)^{-1/2}$ nach stei-

genden Potenzen von t sind, unter δ' und δ'' die Winkelabstände von den Elektroden verstanden. Hiernach findet man:

$$P_n = \frac{n+1}{nR}\left\{C' p_n' \left(\frac{t'}{R}\right)^n + C'' p_n'' \left(\frac{t''}{R}\right)^n\right\},$$

und daher ist:

$$\sum_1^\infty P_n \left(\frac{t}{R}\right)^n =$$

$$\frac{1}{R}\left\{C' \sum_1^\infty p_n' \left(\frac{tt'}{R^2}\right)^n + C'' \sum_1^\infty p_n'' \left(\frac{tt''}{R^2}\right)^n\right\}$$

$$+ \frac{1}{R}\left\{C' \sum_1^\infty \frac{p_n'}{n} \left(\frac{tt'}{R^2}\right)^n + C'' \sum_1^\infty \frac{p_n''}{n} \left(\frac{tt''}{R^2}\right)^n\right\}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich dadurch erheblich vereinfachen, dass man die Entfernungen von den elektrischen Bildern der Elektroden in Bezug auf die Kugelfläche einführt. Jene Entfernungen seien bezüglich s' und s''. Ferner seien t_1 und t_2 die Leitstrahlen der Bildpunkte. Alsdann kann man setzen:

$$1. \quad \sum_1^\infty p_n' \left(\frac{tt'}{R^2}\right)^n = \sum_0^\infty p_n' \left(\frac{t}{t_1}\right)^n = \frac{t_1}{s'},$$

$$2. \quad \sum_1^\infty p_n'' \left(\frac{tt''}{R^2}\right)^n = \sum_0^\infty p_n'' \left(\frac{t}{t_2}\right)^n = \frac{t_2}{s''}.$$

Was ferner die beiden letzten Glieder in dem Ausdrucke für $\sum_0^\infty P_n \left(\frac{t}{R}\right)^n$ betrifft, so liefert die Differentiation des ersten Gliedes nach t:

$$t\,\frac{d\Sigma}{dt} = \sum_1^\infty p_n' \left(\frac{t}{t_1}\right)^n = \frac{t_1}{s'} - 1,$$

oder auch:

$$d\Sigma = \frac{d\left(\frac{t}{t_1}\right)}{\frac{t}{t_1}\sqrt{1 + \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{t_1}\right)\cos\delta'}} - \frac{dt}{t},$$

und hieraus folgt durch Integration:

$$\Sigma = -\log(s' + t_1 - t\cos\delta') + const.$$

Nun verschwindet aber die fragliche Summe für jedes δ', wenn t verschwindet. Die Integrationsconstante ist also hier gleich

$log\, 2t_1$. Hiernach hat man, da für die zweite Summe Analoges, wie für die erste, gilt:

$$3.\quad \sum_1^{\infty} \frac{p_n'}{n}\left(\frac{tt'}{R^2}\right)^n = log\, \frac{2t_1}{s'+t_1-t\cos\delta'},$$

$$4.\quad \sum_1^{\infty} \frac{p_n''}{n}\left(\frac{tt''}{R^2}\right)^n = log\, \frac{2t_2}{s''+t_2-t\cos\delta''}.$$

Wegen der Relationen 1. bis 4. bleiben in dem Potential nur noch die Constanten C' und C'' unbestimmt. Man findet aber nunmehr leicht, dass sie entgegengesetzt gleich sind, sowie dass ihr absoluter Werth sich in gleicher Weise, wie der entsprechende Werth bei der Strömung im unendlichen Raume, durch das Stromquantum und den Fortpflanzungscoefficienten ausdrückt. Hiernach ist also, unter C jenen Werth verstanden:

$$V = C\left\{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} + \frac{1}{R}\left(\frac{t_1}{s'} - \frac{t_2}{s''}\right) + \frac{1}{R}\, log\, \frac{t_1\,(s''+t_2-t\cos\delta'')}{t_2\,(s'+t_1-t\cos\delta')}\right\}.$$

Hinsichtlich des Widerstandes eines sphärischen Leiters findet man mittelst des gewonnenen Potentiales, dass er in erster Annäherung dem des unendlichen Raumes gleichkommt, wenn beide Elektroden innerhalb der Oberfläche liegen. Er wird anderthalbmal so gross, wenn eine der Elektroden auf die Oberfläche rückt, und doppelt so gross, wenn beide Elektroden in der Oberfläche liegen.

Aus dem Vorhergehenden ist leicht zu entnehmen, wie die elektrische Strömung in einem nach aussen unbegrenzten, mit einer sphärischen Höhlung versehenen Leiter, sowie in einer Kugelschale für den Fall zweier punktförmiger Elektroden gefunden werde. In dem erst genannten Falle wird die Strömung durch folgendes Potential bestimmt:

$$V = C\left\{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} + \frac{1}{R}\left(\frac{t_1}{s'} - \frac{t_2}{s''}\right) + \frac{1}{R}\, log\, \frac{(1-\cos\delta')\,(s''+t_2-t\cos\delta'')}{(1-\cos\delta'')\,(s'+t_1-t\cos\delta')}\right\}.$$

Litteratur. Helmholtz. Ueber einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche. Pogg. Annal. Bd. LXXXIX.

Felici. Nuova nota sulla propagazione della elettricità voltaica nell' intorno di una sfera. Fortschritte der Physik. 1854.

6. Von der stationären elektrischen Strömung in einer sphärischen Fläche von constanter verschwindender Dicke.

Durch eine punktförmige Elektrode trete eine elektrische Strömung in eine beliebig begrenzte sphärische Fläche von constanter verschwindender Dicke herein und durch eine zweite punktförmige Elektrode wiederum heraus. Offenbar kann hier das Potential als Function der Winkelcoordinaten φ, θ eines Polarcoordinatensystemes angesehen werden, dessen Pol im Centrum der Fläche liegt, und dann muss es in allen Punkten der letzteren folgender Gleichung genügen:

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} + cotg\,\varphi\,\frac{dV}{d\varphi} + \frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich durch ähnliche Betrachtungen, wie wir sie bei der elektrischen Strömung in einer ebenen Platte angestellt haben, dass das Potential diese Form hat:

$$V = C' \log \sin d' + C'' \log \sin d'' + \int \log \sin d\; dq.$$

Hier bedeuten aber C' und C'' zwei Constanten, d' und d'' die Winkelabstände von der positiven und negativen Elektrode, dq das Element von fictiven elektrischen Massen, welche auf dem Rande der Fläche verbreitet sind und d den Winkelabstand von dq.

Wenn ins Besondere die Fläche eine volle Kugelfläche bildet, so kommt, wie man leicht findet:

$$V = C \log \frac{\sin d'}{\sin d''},$$

wo zu setzen ist, unter J das Stromquantum, unter δ die Dicke und unter $\varkappa$ den Fortpflanzungscoefficienten der Fläche verstanden:

$$C = -\frac{J}{2\delta\varkappa\pi}.$$

Für den Widerstand der Kugelfläche erhält man den Werth $-\frac{\log\tau}{\delta\varkappa\pi}$, wo τ eine analoge Bedeutung, wie bei der ebenen Platte, hat.

7. Von der stationären elektrischen Strömung in einem Kreiscylinder.

Von der Strömung der Elektricität in einem Kreiscylinder betrachten wir den einfacheren Fall, wo zwei punktförmige, auf der Axe und symmetrisch in Bezug auf die Mittelebene des Cylinders gelegene Elektroden auftreten. Das Potential V lässt sich alsdann auffassen als Function zweier Veränderlichen, der Entfernung t von der Axe und der Entfernung z von der Mittelebene des Cylinders, und es ist für die ganze Ausdehnung des Leiters:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0.$$

Dieser Differentialgleichung genügen die Ausdrücke:

$$f(t) \sin mz, \; f(t) \cos mz, \; f(t) e^{-mz}, \; f(t) e^{mz},$$

wenn $f(t)$ die folgende lineare Differentialgleichung befriedigt:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{df}{dt} - m^2 f = 0.$$

Durch eine Summe von solchen particulären Lösungen lässt sich aber jedes Integral der partiellen Differentialgleichung darstellen.

Da das Potential V nicht auf der ganzen Axe unendlich werden darf und alle Stromverhältnisse in Bezug auf die Mittelebene symmetrisch sein müssen, so besteht V aus einem constanten Theile und einer Function, die in Bezug auf z ungerade ist. Ferner bemerke man, dass sich der Verlauf dieser letzten Function für ein bestimmtes t von der einen Endfläche des Cylinders bis zur anderen durch eine Reihe darstellen lässt, welche nach den Sinus der Vielfachen von $\frac{\pi z}{h}$ fortschreitet, unter h die Höhe des Cylinders verstanden. Hiernach kann man nun, von dem constanten Summanden des Potentiales absehend, setzen:

$$V = \sum_{1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi z}{h},$$

wo A_n der oben stehenden linearen Differentialgleichung für

$m = \frac{n\pi}{h}$ genügen muss. Für jenen Werth von m sind aber folgende Ausdrücke zwei particuläre Integrale der Gleichung:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{n\pi t}{h}x}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = b\,(nt), \quad \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-\frac{n\pi t}{h}x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = c\,(nt).$$

Es ist also, unter β_n und γ_n zwei Constanten verstanden:

$$A_n = \beta_n b\,(nt) + \gamma_n c\,(nt).$$

Die Bestimmung der Constanten β_n und γ_n ergiebt sich aus den Bedingungen, welchen das Potential an den Grenzen, d. h. an der Oberfläche des Cylinders und in der Nähe der Elektroden unterworfen ist. Es muss erstlich in den ebenen Endflächen der Werth von $\frac{dV}{dz}$ verschwinden. Dies wird erreicht, wenn β_n und γ_n für jedes gerade n gleich Null gesetzt werden. Ferner muss auf dem Mantel des Cylinders $\frac{dV}{dt}$ verschwinden. Hieraus folgt, unter R den Radius des Cylinders verstanden:

$$\beta_n \frac{db}{dt} + \gamma_n \frac{dc}{dt} = 0, \text{ für } t = R,$$

wodurch sich das Verhältniss der fraglichen Coefficienten für einen gleichen Index bestimmt. Die weitere Bestimmung derselben wird erhalten aus der Bedingung, dass das Potential in unmittelbarer Nähe der Elektroden in $\frac{C}{r'}$ und $-\frac{C}{r''}$ übergehen muss, wenn r' und r'' die Entfernungen von den Elektroden sind und C eine Constante bedeutet, die sich bestimmt, sobald das Stromquantum gegeben ist.

Indem wir uns folgends auf den Fall, wo $R = \infty$ ist, also auf den Fall einer plan-planen, allseitig unbegrenzten Platte von endlicher Dicke beschränken, erhalten wir nach dem Vorhergehenden, da das Verhältniss $\frac{db}{dt} : \frac{dc}{dt}$ für $t = \infty$ verschwindet:

$$V = \Sigma\, \beta_n b(nt) \sin \frac{n\pi z}{h} \quad (n = 1, 3, 5 \ldots),$$

und es erübrigt, die Bedingung für den Verlauf des Potentiales in der Nähe der Elektroden zu erfüllen. Zu dem Ende geben

wir dem Coefficienten $b(nt)$ die gewöhnliche Form der Coefficienten einer nach den Sinus der Vielfachen von $\frac{\pi z}{h}$ fortschreitenden Reihe. Es ist:

$$2\int_1^{\infty}\frac{e^{-qtx}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos qx}{\sqrt{t^2+x^2}}\,dx.$$

Hiernach hat man, unter α eine beliebige reelle Grösse verstanden:

$$b(nt) = \frac{1}{4\sin\frac{n\pi\alpha}{h}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{n\pi(x+\alpha)}{h} - \sin\frac{n\pi(x-\alpha)}{h}}{\sqrt{t^2+x^2}}\,dx.$$

Die Substitution $x = z \pm \alpha$ liefert ferner:

$$b(nt) =$$

$$\frac{1}{4\sin\frac{n\pi\alpha}{h}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+(z-\alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{t^2+(z+\alpha)^2}}\right)\sin\frac{n\pi z}{h}\,dz.$$

Zerlegen wir nun das Integral in Integrale mit den Grenzen 0 und h, h und $2h$ u. s. f., sowie 0 und $-h$, $-h$ und $-2h$ u. s. f. und verwandeln sodann die Theilintegrale in solche mit der unteren Grenze 0, so kommt für ein ungerades n:

$$b(nt) = \frac{1}{4\sin\frac{n\pi\alpha}{h}}\int_0^h\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu}\left\{\frac{1}{\sqrt{t^2+(z+\nu h-\alpha)^2}}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{t^2+(z+\nu h+\alpha)^2}}\right\}\sin\frac{n\pi z}{h}\,dz.$$

Das hier auftretende Integral ist aber gleich dem $\frac{1}{2}h$-fachen des Coefficienten mit dem Index n in der Entwickelung der Function

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu}\left\{\frac{1}{\sqrt{t^2+(z+\nu h-\alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{t^2+(z+\nu h+\alpha)^2}}\right\} = U$$

nach den Sinus der Vielfachen von $\frac{\pi z}{h}\cdot$ Glieder mit geraden

Indices treten in jener Entwickelung nicht auf, wie sofort aus den folgenden Bemerkungen erhellen wird.

Die Function U kann aufgefasst werden als Potential von Punktenpaaren mit den elektrischen Massen $+1$ und -1, die auf der Axe und symmetrisch in Bezug auf die Mittelebene so liegen, dass die Punkte eines Paares um 2α, die Mittelpunkte zweier auf einander folgender Paare um h von einander entfernt sind, und dass endlich von je zwei auf einander folgenden Paaren gleichartige elektrische Massen einander zugekehrt sind. Setzen wir α gleich der halben Entfernung der Elektroden, so fällt in die Elektrode mit positiver z-Coordinate ein Punkt mit dem Quantum $+1$, in die andere Elektrode ein Punkt mit dem Quantum -1, und verläuft daher die Function U in unmittelbarer Nähe der Elektroden bezüglich wie die Functionen $+\frac{1}{r'}$ und $-\frac{1}{r''}$. Die Function V geht nun aber in U über, wenn gesetzt wird:

$$\beta_n = \frac{8}{h} \, sin \, \frac{n\pi\alpha}{h}.$$

Es wird daher auch der letzten Bedingung für das Potential genügt, wenn man setzt:

$$V = C\,U,$$

oder was dasselbe ist:

$$V = \frac{8\,C}{h} \, \Sigma \, b(nt) \, sin \, \frac{n\pi\alpha}{h} \, sin \, \frac{n\pi z}{h} \quad (n = 1, 3, 5 \ldots),$$

wo zu setzen ist:

$$b(nt) = \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{n\pi t}{h}x}}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx.$$

Die Constante C bestimmt sich, wenn die Elektrode mit der Coordinate α die positive ist, in gleicher Weise durch das Stromquantum und den Fortpflanzungscoefficienten, wie die entsprechende Constante bei der Strömung im unendlichen Raume. Für den Widerstand ergeben sich ferner in erster Annäherung in den drei Fällen, welche in Bezug auf die Lage der Elektroden zu unterscheiden sind, dieselben Ausdrücke, wie in den ent-

sprechenden Fällen bei der Strömung in einem sphärischen Leiter.

Wenn die Platte aus zwei ungleichartigen, in der Mittelebene aneinander stossenden Hälften besteht, so erlangt der veränderliche Theil des Potentiales in beiden Hälften dieselbe Form wie bei einer einfachen Platte, jedoch treten alsdann für die beiden Hälften verschiedene Constanten auf, wegen deren Bestimmung wir auf die Betrachtung der Strömung in einer unendlich dünnen ebenen Platte verweisen können. Ist in dem angegebenen Falle überdies der Fortpflanzungscoefficient in der einen Hälfte der Platte sehr klein in Vergleich mit dem Coefficienten in der anderen Hälfte, so wird die Strömung in jener innerhalb gewisser Grenzen von der Lage der Elektrode in der anderen Hälfte unabhängig sein. Hiernach scheint es von vornherein annähernd gestattet zu sein, die obige Theorie auf den Hergang bei der Erzeugung der Nobili'schen Ringe anzuwenden, wofern hierbei die Polplatte mit der freien Oberfläche des Elektrolyten parallel ist, der Poldraht nur in dem eingetauchten Endpunkte mit dem Elektrolyten in Berührung kommt und endlich die Entfernung jenes Punktes von der Polplatte in Vergleich mit den horizontalen Dimensionen der Polplatte sehr klein ist. Bekanntlich beruht die Entstehung der Nobili'schen Ringe zunächst darauf, dass der elektrische Strom den Elektrolyten zersetzt und der ausgeschiedene elektronegative Bestandtheil sich in einer sehr dünnen Schicht auf der Polplatte, welche aus einem edlen Metalle besteht oder mit einem solchen überzogen ist, niederschlägt. Gewöhnlich dient als Elektrolyt eine Lösung von essigsaurem Bleioxyd in Wasser oder eine Lösung von Bleioxyd in Kalilauge. Die auf die Polplatte niedergeschlagene Schicht besteht alsdann aus Bleihyperoxyd, und da dieses bei geringer Dicke durchsichtig ist, so entsteht durch Beleuchtung der Polplatte die Erscheinung der Nobili'schen Ringe in ähnlicher Weise wie die der Newton'schen Ringe.

Nach einem elektrolytischen Gesetze ist die Quantität eines Bestandtheiles, welcher aus einem Elektrolyten durch einen elektrischen Strom ausgeschieden wird, unter übrigens gleichen Umständen mit der Stärke der Strömung proportional. Hiernach steht zu erwarten, dass bei der Bildung der Nobili'schen

Ringe die Dicke der niedergeschlagenen Schicht mit dem Werthe von $\frac{dV}{dz}$ für $z = 0$ proportional sein werde. Bedeutet also d jene Dicke, K eine Constante, h die doppelte Dicke des Elektrolyten, α die Entfernung der punktförmigen Elektrode von der Polplatte und t die Entfernung vom Lothe jener Elektrode, so ist:

$$d = \frac{K}{h^2} \Sigma n b(nt) \sin \frac{n\pi\alpha}{h} \quad (n = 1, 3, 5 \ldots).$$

Die Dicke nimmt mit der Entfernung von der Axe ab und ist für gleiche Entfernungen gleich. Daher zeigen sich z. B. bei senkrechter Beleuchtung der Polplatte durch homogenes Licht abwechselnd helle und dunkle concentrische Ringe, deren Mittelpunkt dem Lothe der punktförmigen Elektrode entspricht. Wenn hierbei der Stoff der niedergeschlagenen Schicht optisch dünner als das Metall der Polplatte ist, so ist der Gangunterschied der beiden Lichtpartien, welche an den beiden Flächen der Schicht reflectirt werden, in den Punkten der hellsten Kreise gleich einem geraden, und in den Punkten der dunklen Kreise gleich einem ungeraden Vielfachen der halben Wellenlänge des Lichtes. Jener Gangunterschied drückt sich aus durch $2\mu d + \eta \Lambda$, wenn Λ die Wellenlänge in der Luft, μ den Brechungsquotienten des niedergeschlagenen Stoffes und η eine Constante bedeutet, welche von den optischen Constanten jenes Stoffes und des Metalles der Polplatte abhängt. Hiernach hat man also, unter t_i den Radius des iten dunklen Ringes, von aussen nach innen gerechnet, verstanden:

$$2i - 1 - 2\eta = \frac{4\mu K}{h^2 \Lambda} \Sigma n b(nt_i) \sin \frac{n\pi\alpha}{h}.$$

Zu einer vollständigen Vergleichung der letzten Formel mit der Wirklichkeit reichen die dermalen vorliegenden Daten nicht aus. Aus den Beobachtungen, welche Beetz (zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe. Pogg. Annal. Bd. LXXI und XCVII.) über die Nobili'schen Ringe angestellt hat, scheint jedoch hervorzugehen, dass in Folge der galvanischen Polarisation der Elektrodenplatte die Stärke der Strömung in den Punkten der letzteren von der theoretisch bestimmten abweicht. Hinsichtlich des optischen Verhaltens des Bleihyperoxydes fand

Beetz durch Ermittlung des Winkels der vollkommensten Polarisation, dass dieser Stoff, wie für die obige Formel unterstellt wurde, optisch dünner als die edlen Metalle ist.

Litteratur. Riemann. Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe. Pogg. Annal. Bd. XCV.

8. Von der fictiven elektrischen Strömung in der Oberfläche eines Magneten, welche nach aussen hin dieselbe Wirkung, wie der Magnet selbst, ausübt.

Wie die Wirkung einer stationären elektrischen Strömung mit in sich geschlossenen Stromcurven durch die eines Magneten, in welchem der Magnetismus nach einem gewissen Gesetze vertheilt ist, ersetzt werden kann, so ist auch die nach aussen gerichtete Wirkung eines Magneten äquivalent mit der Wirkung einer gewissen stationären elektrischen Strömung in der Oberfläche des Magneten. Es sei nämlich U die Function, durch welche sich der magnetische Zustand des Körpers in der Weise, wie bei Betrachtung der magnetischen Induction gezeigt wurde, darstellen lässt, und es werde, wie dies auch früher stets geschah, nur der Fall ins Auge gefasst, wo die Function U innerhalb des Magneten stetig verläuft. In zwei einander unendlich nahen Niveauflächen habe das Potential die Werthe U_1 und U_2, und es sei $U_1 > U_2$. Durch die Niveauflächen wird aus dem Volumen des Magneten eine unendlich dünne Scheibe herausgeschnitten, und diese wirkt ebenso wie eine gewisse fictive Belegung ihrer beiden Flächen mit entgegengesetzt gleichen Mengen magnetischer Flüssigkeit. Die Dichtigkeit der Belegung ist $-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{dN}$, wenn α eine Constante darstellt und durch $\frac{d\ldots}{dN}$ eine Differentiation nach der Normale der Scheibe angedeutet wird, solche in der Richtung, nach welcher das Potential an Grösse abnimmt, gerechnet. Für das magnetische Moment eines Elementes der Scheibe, dessen Fläche dO und dessen Dicke δ ist, ergiebt sich also:

$$-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dU}{dN}\,\delta\,dO = \frac{U_1 - U_2}{\alpha^2}\,dO.$$

Wir ersehen hieraus, dass die Scheibe ebenso wirkt, wie eine andere, die denselben Rand wie jene und allenthalben die constante unendlich kleine Dicke ε hat, und deren Flächen bezüglich mit nördlich- und südlich-magnetischem Fluidum von der absoluten Dichtigkeit $\frac{U_1 - U_2}{\alpha^2 \varepsilon}$ belegt sind. Die fragliche Scheibe des Magneten wirkt hiernach ebenso wie ein linearer Strom, der im Rande der Scheibe liegt und rechtläufig erscheint, wenn er von der Seite mit südlich-magnetischer Belegung her betrachtet wird, und für dessen Intensität man hat:

$$\frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{U_1 - U_2}{\alpha^2}.$$

Jener Strom kann aber auch ersetzt werden durch eine stationäre gleichgerichtete elektrische Strömung innerhalb des bandförmigen Stückes, welches aus der Oberfläche des Magneten durch die beiden Flächen der Scheibe herausgeschnitten wird. Es sei $d\nu$ die Breite des Bandes, $S d\nu$ das Quantum der positiven Elektricität, welches während der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Bandes hindurchfliesst, so dass S das Maass für die Stärke der fraglichen Strömung in der Oberfläche wird. Man hat alsdann, unter λ die Constante in der Weber'schen Fundamentalformel verstanden:

$$i = 4 \lambda S d\nu.$$

Bezeichnet also $\frac{d \ldots}{d\nu}$ eine Differentiation nach der in der Oberfläche des Magneten gelegenen Normale der Randcurve, solche in der Richtung gerechnet, nach welcher das Potential an Grösse abnimmt, so ist:

$$S = -\frac{\sqrt{2}}{4 \alpha^2 \lambda} \cdot \frac{dU}{d\nu}.$$

Der ganze Magnet kann in unendlich viele solcher transversal-magnetischer Scheiben, wie sie oben betrachtet wurden, zerlegt werden. Daher lässt sich auch seine nach aussen gerichtete Wirkung durch die einer stationären elektrischen Strömung ersetzen, welche in der Oberfläche längs den Durchschnittslinien der letzteren und der Niveauflächen des Potentiales U in der oben näher bestimmten Richtung und Stärke vor sich geht.

Die Function U ist bestimmt, sobald das Potential V des Magneten für den äusseren Raum gegeben ist. Durch letzteres wird nämlich die Dichtigkeit ϱ der idealen magnetischen Oberflächenladung, welche den Magneten hinsichtlich seiner Wirkung nach aussen ersetzt, bestimmt, und es ist ferner, wenn $\frac{d\ldots}{dn}$ eine Differentiation nach der von innen nach aussen gerechneten Normale der Oberfläche andeutet:

$$\varrho = -\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{dU}{dn}.$$

Mit dem Verlaufe von $\frac{dU}{dn}$ in der Oberfläche ist aber auch der Verlauf von U in derselben Fläche — abgesehen von einem constanten Summanden — und folglich auch, da $\Delta^2 U$ im Inneren des Magneten verschwindet, der Verlauf in der ganzen Ausdehnung des letzteren gegeben. Es ist nämlich für jeden Punkt ausserhalb des Magneten, wenn r die Entfernung des betreffenden Punktes von dem Oberflächenelemente ds bedeutet:

$$\int \frac{\frac{dU}{dn}}{r}\, ds = \int U \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, ds.$$

Ist nun U' eine zweite Function, für welche $\Delta^2 U'$ im Inneren des Magneten verschwindet und $\frac{dU'}{dn}$ in der Oberfläche mit $\frac{dU}{dn}$ zusammenfällt, so liefert obige Gleichung:

$$\int (U - U') \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, ds = 0,$$

was offenbar nur möglich ist, wenn $U - U'$ in allen Punkten der Oberfläche einen und denselben Werth hat.

Dem Obigen zufolge ist auch die Stärke der Strömung durch das Potential des Magneten bestimmt, und man bemerke, dass in dem schliesslichen Ausdrucke für dieselbe die Constante α nicht mehr auftritt.

Die Function U und hiernach auch die Stromstärke S lässt sich aus dem Potentiale V unter Anderem leicht herleiten, wenn der Magnet von sphärischer Form ist, wie dies z. B. bei

der Erde angenommen werden darf. Man hat alsdann, wenn wir die früheren Bezeichnungen beibehalten:

$$V = R \sum_1^\infty P_n \left(\frac{R}{t}\right)^{n+1}, \quad \varrho = \frac{1}{4\pi} \sum_1^\infty (2n+1) P_n.$$

Setzt man nun ferner:

$$U = \sum_1^\infty \Pi_n \left(\frac{t}{R}\right)^n,$$

so kommt auch:

$$\varrho = -\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\alpha^2 R} \sum_1^\infty n \Pi_n.$$

Die Vergleichung der beiden für ϱ aufgestellten Ausdrücke liefert:

$$U = -\frac{\alpha^2 R}{4\pi} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n} P_n \left(\frac{t}{R}\right)^n,$$

und hieraus folgt:

$$S = \frac{\sqrt{2} R}{16 \lambda \pi} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{dP_n}{dv}.$$

Bei einer homogen magnetisirten Kugel, deren Axe in die Axe des Polarcoordinatensystemes fällt, findet man, wenn M das magnetische Moment bedeutet:

$$S = \frac{3\sqrt{2}}{16 \lambda \pi} \cdot \frac{M}{R^3} \sin \varphi.$$

Die Stromcurven fallen mit den Parallelkreisen zusammen, und die Strömung erscheint von der Seite des Nordpoles her als rückläufig.

IV.

THEORIE DER INDUCTION ELEKTRISCHER STRÖME.

1. Von der aus der relativen Bewegung eines Leiters und eines linearen elektrischen Stromes hervorgehenden elektromotorischen Kraft.

Die Erfahrung lehrt, dass in einem Leiter durch einen constanten elektrischen Strom oder durch einen permanenten Magneten elektrische Strömungen hervorgerufen werden, sobald und so lange als die relative Lage des Leiters gegen den Strom oder den Magneten geändert wird. Nach Beendigung der relativen Bewegung stellt sich auch sofort das elektrische Gleichgewicht im Leiter wiederum her. In gleicher Weise lehrt auch die Erfahrung, dass ein elektrischer Strom oder ein magnetisch erregter Körper in einem benachbarten Leiter elektrische Strömungen erzeugt, wenn sich die Intensität des Stromes oder diejenige des Magnetismus ändert. Beide Arten der elektrodynamischen Induction wurden zuerst von Faraday entdeckt. Die Gesetze der Induction elektrischer Ströme durch Aenderung der Intensität eines Stromes oder eines Magnetpoles lassen sich bis jetzt theoretisch nur unvollständig und mit Hülfe gewisser Annahmen über den Grund der Intensitätsänderung ableiten, weswegen wir nur das eine Resultat anführen wollen, welches man so findet, dass das Verschwinden eines Stromes in einem Leiter

oder des Magnetismus in einem Magnetpole in einem benachbarten Leiter dieselbe elektrische Strömung erzeugt, wie sie auch entstehen würde, wenn der Strom oder der Magnetpol, von seiner wirklichen Lage ausgehend, sich bis ins Unendliche entfernte und dass das Entstehen eines Stromes in einem Leiter oder des Magnetismus in einem Magnetpole in einem benachbarten Leiter denselben Strom hervorruft, der auch entstehen würde, wenn der Strom oder Magnetpol, von einer unendlich weit entfernten Lage ausgehend, sich gegen den Leiter hinbewegte, bis er die Lage einnähme, welche er wirklich einnimmt.

Wir wenden uns also sofort zur Betrachtung der Induction durch die Aenderung der relativen Lage eines Stromes und eines Leiters, und um die Gesetze derselben herzuleiten, betrachten wir eine punktförmige positiv-elektrische Masse q', die sich in einer vorgeschriebenen Bahn bewegt, während letztere selbst nebst der Masse q' um eine beliebige Axe rotirt. In die Rotationsaxe legen wir die z-Axe eines im Raume festen rechtwinkligen Coordinatensystemes und bezeichnen die Coordinaten der Masse q' in Bezug auf dieses System durch x', y', z'. Die Wirkung, welche die Masse q' auf die in einen Punkt P concentrirte elektrische Einheit nach der Richtung $q'P$ ausübt, drückt sich alsdann wie folgt aus, wenn λ die Constante der Weber'schen Formel, t die Zeit, r die Entfernung der Masse q' von P bedeutet und wenn a, b, c die Axenwinkel für die genannte Richtung sind:

$$k = \frac{\lambda^2 q'}{r^2}\left\{\frac{1}{\lambda^2} + 2\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right] - 3\left[\cos a\,\frac{dx'}{dt}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \cos b\,\frac{dy'}{dt} + \cos c\,\frac{dz'}{dt}\right]^2 - 2r\left[\cos a\,\frac{d^2x'}{dt^2} + \cos b\,\frac{d^2y'}{dt^2} + \cos c\,\frac{d^2z'}{dt^2}\right]\right\}.$$

Um dem letzten Ausdrucke eine für die Folge bequemere Form zu geben, führen wir neue rechtwinklige Coordinaten ξ, η, ζ ein, deren Axen mit der vorgeschriebenen Bahn der Masse q' fest verbunden sind und sich daher mit jener bewegen. Es falle aber der Anfangspunkt der neuen Coordinaten in den der alten Coordinaten und die Axe der ζ in die der z. Ferner mögen zur Zeit, für welche die Wirkung der Masse q' auf P bestimmt

werden soll, die Axen der ξ und der x, sowie die der η und y coincidiren. Alsdann ist, wenn der Winkel zwischen den Axen der ξ und x, oder der η und y durch ψ und die Coordinaten der Masse q' durch ξ', η', ζ' bezeichnet werden:

$$x' = \xi' \cos\psi - \eta' \sin\psi,\ y' = \eta' \cos\psi + \xi' \sin\psi,\ z' = \zeta'.$$

Eine zweimalige Differentiation nach t liefert nun für die betreffende Zeit:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d\xi'}{dt} - \eta' \frac{d\psi}{dt},\ \frac{dy'}{dt} = \frac{d\eta'}{dt} + \xi' \frac{d\psi}{dt},\ \frac{dz'}{dt} = \frac{d\zeta'}{dt};$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2\xi'}{dt^2} - \xi' \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \eta' \frac{d^2\psi}{dt^2} - 2\frac{d\eta'}{dt} \cdot \frac{d\psi}{dt},$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2\eta'}{dt^2} - \eta' \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \xi' \frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\frac{d\xi'}{dt} \cdot \frac{d\psi}{dt},$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2\zeta'}{dt^2}.$$

Der Ausdruck, welcher nach Substitution obiger Ausdrücke aus k hervorgeht, werde durch $k(+q')$ bezeichnet. Kehren wir in letzterem das Vorzeichen von q' und das der Quotienten $\frac{d\xi'}{dt}$, $\frac{d\eta'}{dt}$, $\frac{d\zeta'}{dt}$ um, so erhalten wir die Wirkung $k(-q')$ einer zweiten entgegengesetzt gleichen elektrischen Masse, die sich an derselben Stelle wie q' befindet, aber die vorgeschriebene Bahn in entgegengesetzter Richtung durchläuft. Für die Gesammtwirkung K beider Massen findet man:

$$K = k(+q') + k(-q') =$$

$$\frac{4\lambda^2 q'}{r^2} \cdot \frac{d\psi}{dt} \left\{ 2\left(\xi' \frac{d\eta'}{dt} - \eta' \frac{d\xi'}{dt}\right) - 3\left(\cos a \frac{d\xi'}{dt} + \cos b \frac{d\eta'}{dt} + \cos c \frac{d\zeta'}{dt}\right) \right.$$

$$\left. (\cos b \,.\, \xi' - \cos a \,.\, \eta') + 2r \left(\cos a \frac{d\eta'}{dt} - \cos b \frac{d\xi'}{dt}\right) \right\}.$$

Mittelst des letzten Ausdruckes ist es nunmehr leicht, die elektromotorische Kraft zu finden, welche in einem ruhenden Leiter seitens des Elementes eines constanten linearen elektrischen Stromes dadurch erregt wird, dass der letztere um eine feste Axe rotirt. Zu dem Ende brauchen wir nur für die vorgeschriebene Bahn der Masse q' die Stromcurve und für die Masse selbst das in dem Elemente enthaltene Quantum positiver Elektricität zu setzen, welches sich durch $\frac{i' ds'}{4\lambda v'}$ ausdrückt,

wenn ds' die Länge des Elementes, i' die Intensität des Stromes und v' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektricität ist. Um aber einen von der Wahl der Coordinaten unabhängigen Ausdruck für die fragliche Kraft zu erzielen, führen wir die Geschwindigkeit v_1' des bewegten Elementes in seiner Bahn, sowie folgende Grössen und Bezeichnungen ein. Der Winkel zwischen den Richtungen von ds', d. h. der positiven Strömung im Elemente, und r, letzteres von ds' nach P gerechnet, sei δ', der Winkel zwischen v_1' und r sei δ_1', und der Winkel zwischen v_1' und ds' sei θ_1'. Ferner sei γ' der Winkel, welchen das Element mit der Drehaxe bildet und Δ der Winkel zwischen r und der zur Rotationsaxe senkrechten Normale des Elementes. Hierbei werde aber erstlich unterstellt, dass die Richtung der Rotationsaxe nach der Seite hin gerechnet werde, von woher die Drehung als rechtläufig erscheint. Zweitens werde die genannte Normale des Elementes so gerechnet, dass dieselbe, wenn sie um ihren Durchschnittspunkt mit dem Elemente eine rechtläufige Drehung von der Grösse eines rechten Winkels ausführt, mit der auf der Rotationsaxe senkrecht stehenden Componente des Elementes zusammenfällt. Endlich werde noch die Winkelgeschwindigkeit durch ω bezeichnet. Alsdann ergiebt sich nach dem Obigen durch nahe liegende Umbildungen folgender Ausdruck für die fragliche elektromotorische Kraft:

$$K = \frac{2\lambda i' ds'}{r^2} \{v_1'(\cos\theta_1' - \tfrac{3}{2}\cos\delta'\cos\delta_1') + r\omega\cos\Delta\sin\gamma'\}.$$

Diese Formel bewahrt auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn die Rotationsaxe durch das Element hindurchgeht und die Geschwindigkeit in der Bahn verschwindet, während die Winkelgeschwindigkeit einen endlichen Werth behält, sowie wenn die Rotationsaxe ins Unendliche rückt und die Winkelgeschwindigkeit verschwindet, während die Geschwindigkeit in der Bahn endlich bleibt, d. h. wenn die Rotation in eine geradlinige Bewegung oder eine Verschiebung übergeht. Eine jede beliebige Bewegung kann aber für einen verschwindend kleinen Zeittheil als die Resultante einer Rotation und einer Verschiebung angesehen werden, und die entsprechende elektromotorische Kraft ist offenbar die Resultante der beiden aus den componirenden

Bewegungen hervorgehenden Kräfte, so dass also mittelst der oben gewonnenen Formel die elektromotorische Kraft für jede beliebige Bewegung des Stromelementes gefunden werden kann.

Da die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Massen nicht von ihrer absoluten Bewegung, sondern nur von ihrer relativen Bewegung in Bezug auf ihre Verbindungslinie abhängt, so muss offenbar in einem Leiter seitens eines Stromelementes nicht bloss dadurch, dass letzteres sich bewegt, sondern auch wenn der Leiter allein in Bewegung begriffen ist, oder wenn sowohl der Leiter, als auch das Element sich bewegt, eine Scheidungskraft entwickelt werden. Diese Kraft ist in jedem Punkte des Leiters eine und dieselbe für gleiche relative Bewegungen des Punktes und des Stromelementes. In der That ergiebt sich auch direct für die Kraft, womit das oben betrachtete Element ds' auf die in P concentrirte Einheit der Elektricität einwirkt, die gleiche Richtung und Grösse wie oben, wenn das Element in Ruhe bleibt, dahingegen der Punkt P um dieselbe Axe und mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, aber in entgegengesetztem Sinne, wie vorher das Stromelement rotirt. Betrachten wir nämlich zunächst wiederum die Wirkung einer einzelnen Masse q', deren vorgeschriebene Bahn in Ruhe ist, auf den nunmehr rotirenden Punkt P, so ergiebt sich, wenn v_1 und v' die Geschwindigkeiten von P und q' in ihren Bahnen, θ_1 den Winkel zwischen den Richtungen jener Geschwindigkeiten und δ_1, δ' die Winkel zwischen denselben Richtungen und r bedeuten, und wenn übrigens dieselben Bezeichnungen wie bisher beibehalten werden (siehe I. 1):

$$k(+q') = \frac{\lambda^2 q'}{r^2}\left\{\frac{1}{\lambda^2} + 2(v_1^2 + v'^2 - 2v_1 v' \cos\theta_1) - 3(v_1 \cos\delta_1 - v' \cos\delta')^2 \right.$$
$$\left. + 2r(N_1 \cos\nu_1 - N' \cos\nu')\right\}.$$

Zu dem Stromelemente übergehend, finden wir hieraus:

$$K = -\frac{2\lambda i' v_1 ds'}{r^2}\left\{\cos\theta_1 - \tfrac{3}{2}\cos\delta_1 \cos\delta'\right\}.$$

Dieser Ausdruck fällt mit demjenigen zusammen, welchen wir oben für den Fall erhielten, wo das Stromelement rotirt, wofern die Rotationen entgegengesetzt gleich sind. Um uns hiervon zu überzeugen, fällen wir aus P und ds' zwei Perpen-

dikel u und u' auf die Rotationsaxe und bezeichnen den Winkel, welchen sie mit einander bilden, durch σ. Ferner bezeichnen wir die Axenwinkel des Elementes durch α', β', γ' und legen der Einfachheit wegen die x-Axe des oben angewandten festen Coordinatensystemes mit dem Perpendikel u parallel. Alsdann kommt für das angegebene Verhältniss der Rotationen:

$$v_1' \cos\theta_1' = - u'\omega(\cos\alpha' \sin\sigma - \cos\beta' \cos\sigma),$$
$$r\omega \cos\Delta \sin\gamma' = r\omega(\cos a \cos\beta' - \cos b \cos\alpha').$$

Ferner hat man:

$$u' \cos\sigma + r\cos a = u, \quad u' \sin\sigma + r\cos b = 0;$$

folglich ist auch:

$$1. \quad v_1' \cos\theta_1' + r\omega\cos\Delta \sin\gamma' = - v_1 \cos\theta_1.$$

Aus der Projection der von u, u' und r gebildeten Figur auf die xy-Ebene findet man, wenn ε und ε' die an der Projection von r anliegenden Winkel sind:

$$u : u' = \sin\varepsilon' : \sin\varepsilon.$$

Ferner liefert ein körperliches Dreieck, dessen Kanten mit r, der Projection von r und der Richtung von v_1 parallel sind, unter η den Winkel verstanden, welchen r mit der xy-Ebene bildet:

$$\sin\varepsilon \cos\eta = \cos\delta_1.$$

Ein zweites körperliches Dreieck, dessen Kanten mit r, der Projection von r und der Richtung von v_1' parallel laufen, liefert:

$$- \sin\varepsilon' \cos\eta = \cos\delta_1'.$$

Hiernach hat man, da sich u und u' zu einander verhalten wie v_1 und v_1':

$$2. \quad v_1' \cos\delta_1' = - v_1 \cos\delta_1.$$

Aus den Relationen 1. und 2. erhellt aber die Identität der beiden fraglichen Ausdrücke.

Der zweite für die Scheidungskraft gefundene Ausdruck führt auf eine einfache Regel zur Bestimmung jener Grösse. Man denke sich nämlich die relative Bewegung des Leiters und des Stromelementes auf eine Bewegung des Leiters allein zurückgeführt. Für diese Bewegung sei v_1 die Geschwindigkeit des Punktes P, für welchen die elektromotorische Kraft ermittelt werden soll. Ferner denke man sich an der Stelle von P ein Stromelement ds_1, dessen Richtung mit der Richtung von v_1

zusammenfalle, und dessen Intensität i_1 so bestimmt werde, dass man hat:

$$i_1\, d s_1 = 2\lambda v_1.$$

Die Scheidungskraft, welche seitens des Elementes ds' in P erregt wird, ist dann gleich der Wirkung, welche jenes Element auf das Element ds_1 ausübt. Mittelst dieser Regel bestimmt sich ohne Weiteres die elektromotorische Kraft, welche bei der relativen Bewegung eines in sich geschlossenen Stromes und eines Leiters entsteht. Ihre Componenten nach den Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystemes seien X_1, Y_1, Z_1. Alsdann hat man, wenn α_1, β_1, γ_1 die Axenwinkel von v_1 sind, übrigens aber die bisherigen Bezeichnungen beibehalten werden:

$$\frac{X_1}{\lambda i' v_1} = C\cos\beta_1 - B\cos\gamma_1,\quad \frac{Y_1}{\lambda i' v_1} = A\cos\gamma_1 - C\cos\alpha_1,$$

$$\frac{Z_1}{\lambda i' v_1} = B\cos\alpha_1 - A\cos\beta_1,$$

wo zu setzen ist:

$$A = \int\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'}dy' - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'}dz'\right\},\ B = \int\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}dz' - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz'}dx'\right\},$$

$$C = \int\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy'}dx' - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx'}dy'\right\}.$$

2. Von der in einem linearen Leiter durch relative Bewegung gegen einen constanten elektrischen Strom oder Magneten inducirten elektrischen Strömung.

Bei der relativen Bewegung eines constanten linearen elektrischen Stromes und eines in sich geschlossenen linearen Leiters ruft die aus der Bewegung hervorgehende elektromotorische Kraft in dem Leiter eine elektrische Strömung hervor, die im Allgemeinen von sehr verwickelter Natur sein wird. Unter den gewöhnlichen Umständen jedoch gestalten sich die Verhältnisse einfacher, weil die Geschwindigkeit der ponderablen Materie in Vergleich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektrici-

tät klein ist. Wenn nämlich letzteres der Fall ist, so wird offenbar auf der Oberfläche des Leiters inducirte Elektricität auftreten und diese sich so anordnen, dass stets ihr Potential im Leiter stetig verläuft und in keinem Punkte des Leiters eine Zunahme oder Verminderung der elektrischen Dichtigkeit eintritt. Zugleich leuchtet auch ein, dass für die Entstehung der Strömung im Leiter in jedem Punkte nur die in die Richtung des Bogens oder der Tangente fallende Componente der elektromotorischen Kraft in Betracht kommt. Es sei nun s der Bogen des Leiters, E die entsprechende Componente der elektromotorischen Kraft in der Richtung des Bogens und V das entsprechende Potential der auf der Oberfläche des Leiters befindlichen Elektricität. In dem Inneren des Leiters tritt alsdann die Kraft $E - \frac{dV}{ds}$ auf. Mit ihr ist unter übrigens gleichen Umständen die in Strömung begriffene Elektricität proportional. Soll daher keine Aenderung der elektrischen Dichtigkeit eintreten, so muss, wenn der Querschnitt des Leiters constant ist, sein:

$$\frac{dE}{ds} - \frac{d^2V}{ds^2} = 0.$$

Hieraus folgt, unter g und h zwei Constanten verstanden:

$$V = g + hs + \int_0^s E ds,$$

und da das Potential längs des Leiters stetig verlaufen muss, so bestimmt es sich näher wie folgt, wenn l die ganze Länge des Leiters bedeutet:

$$V = g - \frac{s}{l}\int_0^l E ds + \int_0^s E ds.$$

Wie bei der stationären linearen Strömung, so ist auch hier das Quantum Elektricität, welches während des Zeitdifferentiales in der Richtung des Bogens durch einen Querschnitt fliesst, gleich dem Producte aus dem Zeitdifferential, dem Fortpflanzungscoefficienten, dem Querschnitte und der in die Richtung des Bogens fallenden Triebkraft. Wird also jenes Quan-

tum durch Idt, der Fortpflanzungscoefficient durch $\varkappa$ und der Querschnitt durch ω bezeichnet, so kommt:

$$I = \varkappa\omega\left(E - \frac{dV}{ds}\right),$$

oder, wenn der Widerstand des Leiters durch w bezeichnet wird:

$$I = \frac{1}{w}\int_0^l E\,ds.$$

Die inducirte elektrische Strömung kann nach diesem Ergebniss für einen verschwindend kleinen Zeittheil als ein stationärer linearer Strom aufgefasst werden. Das Stromquantum wird durch den absoluten Werth von I gemessen, und es stimmt die Richtung des Stromes mit der des Bogens s überein oder nicht, je nachdem I positiv oder negativ ist. Die Grösse I werden wir das der betreffenden Zeit entsprechende Stromquantum des inducirten Stromes nennen, und dem entsprechend unter der Intensität i des inducirten Stromes das Product $4\lambda I$ verstehen, so dass auch die Intensität positiv oder negativ wird, je nachdem die Stromrichtung mit der Richtung des Bogens übereinstimmt oder nicht. Ferner erscheint es zweckmässig, die Integrale $\int Idt$ und $\int idt$, welche sich über eine endliche Zeit erstrecken, einzuführen. Sie mögen bezüglich Stromquantum und Intensität des Integralstromes für das betreffende Zeitintervall heissen. Das erste Integral stellt das Quantum sämmtlicher Elektricität dar, welche während der fraglichen Zeit den Leiter in der Richtung des Bogens durchströmt. Wenn ins Besondere das Zeitintervall sehr kurz ist, so kann der absolute Werth des ersten Integrales aufgefasst werden als das Product aus der Zeit und dem Stromquantum eines constanten Stromes im Leiter, welcher während jener Zeit dieselbe Totalwirkung auf einen zweiten linearen elektrischen Strom oder einen Magnet wie der wechselnde Inductionsstrom ausübt. Unter Richtung des Integralstromes werden wir die Richtung jenes constanten Stromes verstehen.

Die Formel für das Stromquantum des inducirten Stromes kann leicht auf den allgemeineren Fall ausgedehnt werden, wo

die influencirte Leitung aus einer Reihe von verschiedenen linearen Gliedern besteht. Hier erlangt das Potential V in jedem einzelnen Gliede dieselbe Form wie in dem betrachteten Falle, die Werthe der Constanten g und h aber ändern sich von einem Gliede zum anderen. Zur weiteren Bestimmung des Potentiales dienen die Bedingungen, dass jenes in zwei auf einander folgenden Gliedern an der Berührungsstelle einen und denselben Werth aufweisen, und dass das Stromquantum allenthalben gleich bleiben muss. Durch diese Bedingungen bestimmen sich die Werthe der Constante h vollkommen; man findet nämlich, wenn die in Betracht kommenden Grössen für die auf einander folgenden Gieder durch dieselben Buchstaben wie früher und die Marken 1, 2, ... ν bezeichnet werden:

$$\varkappa_1 \omega_1 h_1 = \varkappa_2 \omega_2 h_2 = \cdot \cdot \cdot \cdot = \varkappa_\nu \omega_\nu h_\nu,$$

$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + h_\nu l_\nu + \int_0^{l_1 + l_2 + \cdots + l_\nu} E ds = 0.$$

Hieraus ergiebt sich aber für das Stromquantum dieselbe Formel wie oben, wenn l für die Länge der ganzen Leitung und w für den Gesammtwiderstand, d. h. die Summe der Widerstände in den einzelnen Gliedern, gesetzt wird.

Dem Ausdrucke für das Stromquantum des inducirten Stromes kann eine für die Folge bequemere Form gegeben werden. Man reducire nämlich zunächst die relative Bewegung des inducirenden Stromes und des influencirten Leiters auf eine Bewegung des letzteren allein. Hierbei sei v_1 die Geschwindigkeit des Elementes ds in seiner Bahn. Die Axenwinkel desselben Elementes seien α, β, γ. Alsdann hat man:

$$\begin{aligned} E &= X_1 \cos\alpha + Y_1 \cos\beta + Z_1 \cos\gamma \\ &= \lambda i' v_1 \{(C\cos\beta_1 - B\cos\gamma_1)\cos\alpha + (A\cos\gamma_1 - C\cos\alpha_1)\cos\beta \\ &\qquad + (B\cos\alpha_1 - A\cos\beta_1)\cos\gamma\} \\ &= -\lambda i' v_1 \{(C\cos\beta - B\cos\gamma)\cos\alpha_1 + (A\cos\gamma - C\cos\alpha)\cos\beta_1 \\ &\qquad + (B\cos\alpha - A\cos\beta)\cos\gamma_1\}. \end{aligned}$$

Man denke sich nun im Träger des inducirenden Stromes, sowie im influencirten Leiter einen Strom von der Intensität Eins. Der erste dieser Hülfsströme stimme mit dem inducirenden Strome, der zweite mit dem Bogen des influencirten Leiters hin-

sichtlich der Richtung überein, und es seien Xds, Yds, Zds die Componenten der Kraft, welche der erste Hülfsstrom auf das Element ds des zweiten Hülfsstromes ausübt. Ferner mögen durch Dx, Dy, Dz die dem Zeitdifferentiale entsprechenden Incremente der Coordinaten des Elementes ds, d. h. die Grössen $v_1 \cos\alpha_1\, dt$, $v_1 \cos\beta_1\, dt$, $v_1 \cos\gamma_1\, dt$ bezeichnet werden. Es kommt dann:

$$Idt = -\frac{2\lambda i'}{w}\int_0^l (XDx + YDy + ZDz)\, ds.$$

Das hier auftretende Integral ist aber gleich der Arbeit, welche die zwischen den beiden Hülfsströmen thätigen Kräfte bei der Bewegung des Inducenten und des Leiters leisten, und dieselbe Arbeit drückt sich auch durch die entsprechende Aenderung des Potentiales beider Ströme in Bezug auf einander aus. Setzen wir also, die frühere Bezeichnung beibehaltend:

$$\frac{1}{2}\int\int \frac{\cos\theta}{r}\, ds\, ds' = W,$$

da denn W das genannte Potential ist, so haben wir nach dem Obigen für das Stromquantum und die Intensität des inducirten Stromes:

$$I = -\frac{2\lambda i'}{w}\cdot\frac{dW}{dt}, \quad i = -\frac{8\lambda^2 i'}{w}\cdot\frac{dW}{dt}.$$

Jenachdem diese Formeln für I und i positive oder negative Werthe liefern, stimmt die Richtung des inducirten Stromes mit der angenommenen Richtung des Bogens s überein oder ist sie ihr entgegengesetzt. Die Richtung des inducirten Stromes ist aber stets eine solche, dass die Wechselwirkung zwischen jenem und dem Inducenten eine Verminderung der lebendigen Kraft der Stromträger und der mit ihnen etwa in Verbindung stehenden ponderablen Materie bedingt; denn man hat für die dem Zeitdifferential entsprechende Arbeit der Kräfte, welche zwischen dem inducirenden und dem inducirten Strome thätig sind:

$$ii'dW = -\frac{8\lambda^2 i'^2}{w}\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 dt.$$

Was den Integralstrom betrifft, so ergiebt sich für sein Stromquantum J und seine Intensität j, wenn W_0 und W die Werthe

des Potentiales der Hülfsströme in Bezug auf einander für den Anfang und das Ende des betreffenden Zeitintervalles bedeuten:

$$J = -\frac{2\lambda i'}{w}(W - W_0),\; j = -\frac{8\lambda^2 i'}{w}(W - W_0).$$

Von unserer bisherigen Bezeichnungsweise abweichend, haben wir oben durch I das auf die Zeiteinheit reducirte Quantum Elektricität, welches durch den Querschnitt des influencirten Leiters in der Richtung des Bogens s fliesst, und durch i das Product $4\lambda I$ bezeichnet, so dass also I und i sowohl positiv, als auch negativ sein können. Die Grössen I und i nannten wir, da eine Verwechselung nicht zu befürchten ist, wie früher Stromquantum und Intensität. Es erscheint aber zweckmässig, in gleicher Weise hinsichtlich des inducirenden Stromes zu verfahren. Wir lassen daher auch die Wahl der Richtung des Bogens s' unbeschränkt und verstehen unter i' die positiv oder negativ genommene Intensität des inducirenden Stromes, jenachdem die Richtung des letzteren mit der gewählten Richtung des Bogens s' übereinstimmt oder nicht. Dies unterstellt, bleiben die oben aufgestellten Formeln ungeändert. Ferner hängt dann der Ausdruck W nur von den beiden Leitern und der Art, wie die Bogen gerechnet werden, ab, weshalb wir ihn das Potential der beiden Leiter in Bezug auf einander nennen werden. Dies Potential ist insofern zweideutig, als sich sein Vorzeichen umkehrt, wenn einer der Bogen in entgegengesetzter Richtung gerechnet wird. Man bemerke endlich auch noch, dass sich das Potential zweier Ströme in Bezug auf einander durch $ii'W$ darstellt, wenn W das Potential der Stromträger in Bezug auf einander darstellt und i, i' die Intensitäten der Ströme sind, jenes Wort jetzt in der oben auseinandergesetzten Bedeutung genommen. Jener Ausdruck fällt übrigens auch der Form nach mit dem früher (I. 2. b.) für dieselbe Grösse aufgestellten Ausdrucke zusammen; es bedeuteten aber früher i und i' die absoluten Intensitäten der Ströme und die Bogen wurden in der Richtung der Ströme gerechnet.

Nachdem wir die Gesetze der Induction durch einen einzelnen linearen Strom kennen gelernt haben, wenden wir uns zu dem allgemeineren Falle, wo die Induction von einem Stromsysteme ausgeht. Bei der Induction durch ein Stromsystem setzt

sich die elektromotorische Kraft offenbar aus den elektromotorischen Kräften der einzelnen Ströme des Systemes zusammen. Daher tritt in den Formeln für den Inductionsstrom bei einem einzelnen inducirenden Strome einfach an die Stelle des Ausdruckes $i'W$ die Summe der analogen Ausdrücke für die einzelnen Ströme des Systemes. Diese Summe, das Potential der inducirenden Ströme in Bezug auf einen Hülfsstrom im influencirten Leiter von der Intensität Eins, oder kürzer das Potential der Inducenten in Bezug auf den Leiter, möge durch W bezeichnet werden. Man hat alsdann für den inducirten Strom:

$$I = -\frac{2\lambda}{w}\cdot\frac{d\mathrm{W}}{dt},\quad i = -\frac{8\lambda^2}{w}\cdot\frac{d\mathrm{W}}{dt},$$

und für den Integralstrom:

$$J = -\frac{2\lambda}{w}(\mathrm{W}-\mathrm{W}_0),\ j = -\frac{8\lambda^2}{w}(\mathrm{W}-\mathrm{W}_0).$$

Diese Formeln enthalten die Gesetze der Induction durch eine beliebige stationäre elektrische Strömung mit geschlossenen Stromcurven. Sie schliessen ferner die Gesetze der Induction durch Aenderung der relativen Lage eines linearen Leiters gegen einen permanenten Magneten, deren Eingangs dieses Capitels gedacht wurde, in sich ein. In der That, nach Ampère's Hypothese vom Wesen des Magnetismus, welche sich auch auf dem Gebiete der Induction bewährt, ist die Wirkung eines Magneten auf die seiner Molecularströme zurückzuführen. Daher übertragen sich die obigen Formeln für die elektro-elektrische Induction ohne Weiteres auch auf die magneto-elektrische, und zwar ist bei letzterer für das in den Formeln auftretende Potential das Potential aller Molecularströme des Magneten in Bezug auf einen Hülfsstrom im Leiter von der Intensität Eins, oder, was dasselbe ist, das elektro-magnetische Potential des Hülfsstromes in Bezug auf den Magneten zu setzen.

Die im Obigen entwickelten Gesetze der Induction durch relative Bewegung gestatten mancherlei naheliegende Verallgemeinerungen. Sie gelten z. B. auch dann noch, wenn sich die Form der linearen Stromträger während der relativen Bewegung ändert, ohne dass jedoch die Länge des Bogens zwischen irgend zwei Punkten eines Stromträgers eine Aenderung erleidet. Weitere Verallgemeinerungen ergeben sich in Hinsicht der

influencirten Leitung. Bisher wurde unterstellt, dass letztere linear und unverzweigt sei, und nur in diesem Falle kann im Allgemeinen von der Einführung des Potentiales und der Anwendung der vorhin erwähnten acht Formeln die Rede sein. Die allgemeinen Betrachtungen über die Entstehung des linearen Inductionsstromes lassen sich aber auch auf gewisse allgemeinere Formen der Leitung ausdehnen, wie jetzt gezeigt werden soll. Die Leitung bestehe aus linearen und nicht linearen Theilen. Jene können stets in einzelne unverzweigte Stücke zerlegt werden, welche kürzehalber Elemente genannt werden mögen. Die Endpunkte jedes einzelnen Elementes seien aber durch den Complex aller übrigen Theile der Leitung mit einander verbunden. Ferner komme nur die Wirkung des Inducenten auf die linearen Theile in Betracht, und der Einfachheit wegen werde zunächst angenommen, dass die influencirte Leitung während der Induction ungeändert bleibe. Unter diesen Umständen kann der Inductionsstrom als die Resultante der Strömungen aufgefasst werden, welche durch die Einwirkung des Inducenten auf jedes einzelne lineare Element für sich hervorgerufen werden. Was aber diese componirenden Strömungen betrifft, so leuchtet zuvörderst ein, dass für jede von ihnen das Potential V in dem betreffenden Elemente dieselbe Form wie bei einem in sich geschlossenen, unverzweigten, linearen Leiter erlangt. Die componirende Strömung ist daher für ein verschwindend kleines Zeittheilchen dieselbe, wie wenn ein constanter Strom von gewisser Intensität das Element durchfliesst, durch den einen Endpunkt in den Complex aller übrigen Theile der Leitung eindringt, und, nachdem er diesen durchflossen, wiederum durch den zweiten Endpunkt in das Element eindringt. Das Quantum der Strömung bestimmt sich wie folgt. Der Bogen des Elementes werde von dem einen Endpunkte an gerechnet, und für eine bestimmte Zeit sei V' der Werth des Potentiales V in jenem Punkte, V'' der Werth in dem zweiten Endpunkte. Die Länge des Elementes sei l. Man hat alsdann, wenn übrigens die frühere Bezeichnung beibehalten wird:

$$V'' - V' = hl + \int_0^l E ds.$$

Ferner hat man, wenn w den Widerstand des Elementes, $\mathfrak{w}$ den Widerstand der übrigen Theile der Leitung für einen in jenem fliessenden Strom bedeutet:

$$hl = -I\mathrm{w},\ V'' - V' = I\mathfrak{w}.$$

Daher ist:

$$I(\mathrm{w} + \mathfrak{w}) = \int_0^l E ds,$$

oder, wenn der Gesammtwiderstand, welchen der Inductionsstrom findet, durch w bezeichnet wird:

$$I = \frac{1}{w} \int_0^l E ds.$$

Dem Obigen zufolge stimmt die einzelne componirende Strömung in jeder Hinsicht mit der Strömung überein, welche entstände, wenn das betreffende Element durch eine congruente lineare galvanische Kette von gleichem Widerstande und mit der elektromotorischen Kraft $\int_0^l E ds$ ersetzt würde. Dies gilt auch noch in dem Falle, wo die Gestalt des Elementes und die Lage seiner Endpunkte sich ändert, wofern nur hierbei die Länge des Bogens zwischen irgend zwei Punkten des Elementes, sowie der Widerstand in dem Complex der Theile zwischen den Endpunkten des Elementes, ungeändert bleibt.

Es erübrigt nunmehr, die im Vorhergehenden entwickelte Theorie der Induction durch relative Bewegung mit der Erfahrung zu vergleichen. Zuvor aber müssen wir noch bemerken, dass Neumann (allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Abhandl. d. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1845.) auf eine gewisse Umkehrung des Gesetzes für die Wechselwirkung zwischen zwei Stromelementen, sowie Plücker (über die Reciprocität der elektro-magnetischen und magneto-elektrischen Erscheinungen. Pogg. Ann. LXXXVII.) auf eine gewisse Umkehrung des Gesetzes für die Wirkung eines Stromelementes auf einen Magnetpol eine Theorie der Inductionserscheinungen gegründet haben. Beide Theorien liefern für die Induction in geschlossenen Leitern durch in sich geschlossene Ströme resp. Mag-

nete dieselben Resultate, wie die aus Weber's Fundamentalformel fliessende Theorie. Daher begnügen wir uns hier damit, hinsichtlich der Eigenthümlichkeiten und des gegenseitigen Verhältnisses der genannten Theorien den Leser auf die Originalabhandlungen zu verweisen.

3. Vergleichung der Theorie der Induction in linearen Leitern durch relative Bewegung gegen einen Strom oder Magneten mit den Ergebnissen der Beobachtung.

a. Induction in einem linearen Leiter durch einen congruenten Strom für den Fall, dass beide in der einen Grenzlage einander sehr nahe, in der anderen Grenzlage unendlich weit von einander entfernt sind.

Nähert man zwei einander congruente Leiter so, dass schliesslich je zwei correspondirende Punkte zusammenfallen, so wächst zuletzt der absolute Werth des Potentiales beider Leiter in Bezug auf einander über alle Grenzen hinaus. Es wird nämlich für ein Element ds' des einen Leiters der Ausdruck $\int \frac{\cos\theta}{r}\, ds$ im Allgemeinen offenbar unendlich gross, wenn die kürzeste Entfernung des Elementes vom zweiten Leiter unendlich klein wird. Aus der gemachten Bemerkung und den Formeln für den Integralstrom ergiebt sich nun für den Fall, dass in dem einen Leiter ein constanter elektrischer Strom auftritt, Folgendes. Es seien erstlich die Leiter unendlich weit oder doch so weit von einander entfernt, dass ihr Potential als verschwindend angesehen werden kann. Werden sie alsdann einander genähert, und kommen schliesslich je zwei correspondirende Punkte sehr nahe bei einander zu liegen, so ist die Richtung des Integralstromes, welcher in dem einen Leiter durch den Strom des andern Leiters inducirt wird, der Richtung des inducirenden Stromes entgegengesetzt, hierbei unterstellt, dass die beiden Richtungen in Bezug auf die Endlage beider Leiter mit einander verglichen werden. Wenn zweitens die Leiter anfänglich allenthalben einander sehr

nahe sind und hierauf sehr weit von einander entfernt werden, so ist die Richtung des Integralstromes, nunmehr in Bezug auf die Anfangslage der Leiter, der Richtung des inducirenden Stromes gleich. Obige Folgerungen stehen mit der Beobachtung vollkommen in Einklang. Um aber die Richtung des Integralstromes in einem Leiter praktisch zu bestimmen, trifft man folgende Anordnung. Der Leiter ist an einer Stelle unterbrochen, und seine Enden sind durch zwei gegen einander isolirte und um einander gewundene Drähte mit den festen Enden des Drahtes eines Multiplicators verbunden. Die Verbindungsdrähte dürfen die Bewegung des Leiters nicht hindern, und der Multiplicator muss so aufgestellt sein, dass er keine merkliche unmittelbare Einwirkung seitens des inducirenden Stromes und der im Leiter auftretenden Strömung erleidet. Zunächst leuchtet nun ein, dass das Quantum des Stromes, welcher bei dieser Anordnung durch relative Bewegung in dem Leiter, den Verbindungsdrähten und dem Multiplicator inducirt wird, und das Quantum des Stromes, welcher bei gleicher Bewegung in dem nicht unterbrochenen Leiter allein inducirt würde, sich zu einander umgekehrt verhalten wie die Widerstände in den betreffenden Leitungen. Es haben daher auch die Integralströme in beiden Fällen gleiche Richtung. Die Richtung des Integralstromes im ersten Falle lässt sich aber, wofern seine Dauer hinreichend kurz ist, leicht aus der Einwirkung auf die Multiplicatornadel erkennen. Diese wird aus ihrer Gleichgewichtslage herausgetrieben, und die fragliche Richtung stimmt mit der eines constanten Stromes überein, welcher die Nadel nach derselben Seite hin ablenkt.

b. Induction in einem kreisförmigen Leiter durch einen kreisförmigen Strom.

Die relative Lage zweier Kreislinien lässt sich unter Anderem bestimmen durch die Längen, die kürzeste Distanz und den Winkel der beiden Perpendikel, welche aus den Mittelpunkten der Kreise auf die Durchschnittslinie ihrer Ebenen herabgelassen werden können. Es seien nun für zwei kreisförmige lineare Leiter l und l' die Längen, e die kürzeste Entfernung und ε der

kleinere Winkel der genannten Perpendikel. Ferner seien bezüglich ψ und ψ' die Winkel, welche die Radien zweier Bogenelemente mit den Perpendikeln bilden. Die Winkel ψ, ψ' und die Bogen s, s' sollen so gerechnet werden, dass ihr Sinn oder ihre Richtung eine und dieselbe wird, wenn die Ebene des einen Kreises um die Durchschnittslinie der Ebenen beider Kreise auf dem kürzesten Wege, also um den Winkel ε, in die Ebene des andern Kreises gedreht wird. Endlich seien R und R' die Radien der Leiter. Man erhält alsdann das Potential der Leiter in Bezug auf einander, wenn man in dem allgemeinen Ausdrucke für dasselbe setzt:

$$ds = R\,d\psi,\ ds' = R'\,d\psi',$$

$$\cos\theta = \cos\psi\cos\psi' + \cos\varepsilon\sin\psi\sin\psi',$$

$$r = \sqrt{\{(e+R\sin\psi - R'\sin\psi')^2 + (l-R\cos\psi)^2 + (l'-R'\cos\psi')^2 - 2\,(l-R\cos\psi)\,(l'-R'\cos\psi')\cos\varepsilon\}}.$$

Die hiernach auszuführenden Integrationen nach ψ und ψ' haben zur unteren Grenze 0, zur oberen Grenze 2π.

Wenn die Axen beider Leiter (die in den Mittelpunkten errichteten Perpendikel) zusammenfallen, so ergiebt sich für das Potential, unter D die Entfernung der Leiter verstanden:

$$W = \frac{RR'}{2}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\psi' \frac{\cos(\psi-\psi')}{\sqrt{D^2+R^2+R'^2-2\,RR'\cos(\psi-\psi')}}.$$

Die Ausrechnung liefert:

$$W = \frac{2\pi\sqrt{RR'}}{c}\left\{(2-c^2)\,F\left(c,\frac{\pi}{2}\right) - 2\,E\left(c,\frac{\pi}{2}\right)\right\},$$

wo zu setzen ist:

$$c^2 = \frac{4\,RR'}{D^2+(R+R')^2}.$$

Das Potential W ist positiv und sein Werth nimmt ab, wenn die Entfernung D wächst. Man bemerke ferner, dass nach den gemachten Unterstellungen und für die angenommene specielle Lage der Leiter die Bogen in gleicher Richtung gerechnet sind. Es ergiebt sich hieraus unter Anderem Folgendes. Wenn einer der Leiter Träger eines elektrischen Stromes ist, und wenn man

einen der Leiter oder beide Leiter längs ihrer gemeinschaftlichen Axe verschiebt, ohne um eine auf letzterer senkrechte Axe zu drehen, so ist die Richtung des Stromes, welcher in dem zweiten Leiter inducirt wird, der Richtung des inducirenden Stromes gleich oder entgegengesetzt, jenachdem sich die Leiter von einander entfernen oder einander nähern. Werden ferner die Leiter aus ihrer Anfangslage herausgebracht und auf irgend einem Wege wiederum in eine solche Lage geführt, dass ihre Axen zusammenfallen und ihre Flächen einander dieselben oder die entgegengesetzten Seiten wie anfänglich zukehren, so ist die Richtung des Integralstromes, in Bezug auf eine der Grenzlagen der Leiter, der Richtung des inducirenden Stromes gleich oder entgegengesetzt, jenachdem die Entfernung beider Leiter zu- oder abgenommen hat. Wenn endlich die Leiter aus ihrer Anfangslage in eine unendliche oder so grosse Entfernung von einander gerückt werden, dass ihr Potential als verschwindend angesehen werden darf, so ist der Integralstrom, in Bezug auf die Anfangslage der Leiter, wie auch im Uebrigen die Bewegung der Leiter beschaffen sein mag, mit dem inducirenden Strome gleichgerichtet. Die entgegengesetzte Richtung erlangt der Integralstrom, nunmehr in Bezug auf die Endlage der Leiter, wenn umgekehrt die Leiter, ursprünglich unendlich weit von einander entfernt, einander genähert werden, so dass zugleich schlieslich ihre Axen zusammenfallen.

Die gefundenen Regeln über die Richtung des inducirten Stromes gelten auch für den Fall, wo an die Stelle der Kreisleiter Spiralen mit kreisförmigen Windungen oder Drahtrollen mit kreisförmigen Windungen und von den gewöhnlichen Formen treten. Aus dem Verhalten des Potentiales zweier Kreisleiter in Bezug auf einander findet man nämlich zunächst, dass auch das Potential einer Spirale in Bezug auf einen Kreis mit derselben Axe an absolutem Werthe zunimmt, wenn die Entfernung der Mittelpunkte abnimmt. Ein Gleiches ergiebt sich hiernach für das Potential zweier Spiralen, deren Axen zusammenfallen, folglich auch für das Potential zweier Drahtrollen, deren Axen zusammenfallen, wofern nur in der einzelnen Rolle, wie es bei den gewöhnlichen Formen der Fall ist, die Anzahl der Windungen in einem Querschnitt constant ist oder nach der

Mitte hin regelmässig zunimmt, so dass die Rolle als ein System von Spiralen mit derselben Axe und derselben Mittelebene aufgefasst werden kann. Durch Versuche mit solchen Drahtrollen, deren man sich zur Verstärkung der inducirenden Wirkung mit Vortheil bedient, werden die oben gewonnenen Ergebnisse vollkommen bestätigt.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich leicht die Gesetze für die analogen Fälle der Induction durch einen cylindrischen Magnetstab von der gewöhnlichen Beschaffenheit. Ueber die Vertheilung des Magnetismus in einem solchen Stabe dürfen wir die Annahme machen, dass sie mit derjenigen übereinstimme, welche ein gleichgeformter Stab aus weichem Eisen unter der Einwirkung einer constanten, mit der Axe parallelen Scheidungskraft aufweist (S. Magnetismus. IX.). Zerlegen wir also den Magnetstab durch Ebenen, welche auf der Axe senkrecht stehen und von welchen je zwei benachbarte um ein gleiches Unendlich-Kleines von einander entfernt sind, in Scheiben, so sind diese annähernd homogen und transversal magnetisirt, und ihr magnetisches Moment nimmt nach der Mitte des Magneten hin stetig zu. Der Magnetstab lässt sich daher durch ein System von Kreisströmen ersetzen, welche in den Rändern der Scheiben liegen und gleich gerichtet sind, deren absolute Intensität aber nach der Mitte des Systemes hin beiderseits in gleicher Weise stetig wächst. Es folgt aber endlich hieraus, dass der Magnetstab bei den hier in Betracht gezogenen Fällen der Induction sich ganz analog wie der Strom in einer Drahtrolle von der oben näher bezeichneten Art verhalten müsse, so zwar, dass der Nordseite des Magneten diejenige Seite der Rolle entspricht, auf welcher die Strömung rückläufig erscheint. In der That ist dies der Fall, wie die Beobachtung lehrt.

c. Unipolare Induction.

Die sogenannte unipolare Induction bietet uns ein Beispiel der Induction in einer veränderlichen, aus linearen und nicht linearen Stücken zusammengesetzten Leitung dar. Sie lässt sich unter Anderem wie folgt beobachten. Auf einen cylindrischen

Magnetstab, welcher um seine Axe in Rotation versetzt werden kann, seien zwei kreisförmige Scheiben aus Metall mit centralen Hülsen geschoben, so dass sie auf der Axe des Magneten senkrecht und mit letzterem in fester leitender Verbindung stehen. Die beiden Scheiben seien ferner durch einen dünnen Metalldraht, dessen Enden an die Ränder der Scheiben mittelst zweier festen Federn angedrückt werden, in leitende Verbindung gesetzt. Wenn man nun den Magneten in Rotation versetzt, so gleiten die Scheiben mit ihren Rändern über die festen Enden des Metalldrahtes, die von dem Drahte und dem Magneten nebst den Scheiben gebildete Leitung bleibt fortwährend geschlossen, und in dieser Leitung tritt alsdann eine elektrische Strömung auf.

Bei dem beschriebenen Versuche besteht die Leitung des Inductionsstromes aus einem linearen und einem nicht linearen Theile, und kommt nur die Wirkung des inducirenden Magneten auf den linearen Theil, den Draht, in Betracht, indem die relative Lage der Punkte des Magneten gegen einander und gegen die mit ihm fest verbundenen Metallscheiben durch die Rotation keinerlei Aenderung erleidet. Man bemerke ferner, dass das System der Strömungscurven im Inneren des Magneten und der Scheiben während der Rotation sich nicht ändert und deshalb auch der Widerstand, welchen der Inductionsstrom findet, fortwährend derselbe bleibt. Für das Quantum jenes Stromes hat man daher:

$$I = \frac{1}{w} \int_0^l E ds.$$

Zum Behufe weiterer Umformungen führen wir ein rechtwinkliges Coordinaten-System ein, dessen Anfangspunkt in den Mittelpunkt und dessen z-Axe in die Axe des Magneten fällt. In Bezug auf dieses System seien Xds, Yds, Zds die Componenten der Kraft, womit der Inducent auf ein Element ds des linearen Leiters einwirkt, solches von einem Strome mit der Intensität Eins und in der Richtung des Bogens durchflossen gedacht. Ferner seien Dx, Dy, Dz die dem Zeitdifferentiale dt entsprechenden Incremente, welche die Coordinaten des Elementes ds erlangen würden, wenn letzteres um die Axe des

Magneten mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche der des Magneten entgegengesetzt gleich ist, in Rotation versetzt würde. Alsdann ist:

$$Idt = -\frac{2\lambda}{w}\int_0^l (\mathrm{X}Dx + \mathrm{Y}Dy + \mathrm{Z}Dz)\, ds.$$

Zur Auswerthung des letzten Integrales muss vor Allem die Anordnung des Magnetismus in dem Magneten gegeben sein. Wenn aber der Magnet einen verhältnissmässig kleinen Durchmesser hat und in gewöhnlicher Weise magnetisirt ist, so kann er im vorliegenden Falle in erster Annäherung durch zwei entgegengesetzt gleiche Pole ersetzt werden, die auf der Axe symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt, nämlich in den Schwerpunkten der nördlichen und der südlichen Massen der idealen Oberflächenladung, liegen. Indem wir uns auf diesen Fall beschränken, wollen wir zunächst denjenigen Theil des fraglichen Integrales, welcher sich auf den Nordpol bezieht, ermitteln. Der Nordpol enthalte das magnetische Quantum q, und es seien $\mathrm{X}'ds$, $\mathrm{Y}'ds$, $\mathrm{Z}'ds$ die Componenten der Kraft, welche er auf das Element ds mit dem Strome Eins ausübt. Diese Componenten drücken sich wie folgt aus:

$$\mathrm{X}'ds = \frac{q}{\sqrt{2}}\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz}dy - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy}dz\right\},$$

$$\mathrm{Y}'ds = \frac{q}{\sqrt{2}}\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx}dz - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz}dx\right\},$$

$$\mathrm{Z}'ds = \frac{q}{\sqrt{2}}\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy}dx - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx}dy\right\}.$$

Es sei ferner α der Bogen des Winkels, welchen eine bestimmte, übrigens beliebig gewählte Axialebene des Magneten mit der xz-Ebene zur Zeit t bildet. Alsdann hat man:

$$Dx = y\,d\alpha,\quad Dy = -x\,d\alpha,\quad Dz = 0.$$

Aus den sechs letzten Relationen ergiebt sich nun, wenn c die z-Coordinate des Nordpoles ist:

$$X'Dx + Y'Dy + Z'Dz = \frac{q\,d\alpha}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{x^2+y^2}{r^3}\,dz - \frac{1}{2} \cdot \frac{z-c}{r^3}\,d\,(x^2+y^2) \right\}$$

$$= \frac{q\,d\alpha}{\sqrt{2}}\, d\left(\frac{z-c}{r}\right).$$

Der Quotient $(z-c):r$ ist dem Cosinus des Winkels gleich, welchen eine vom Nordpole nach dem Elemente gezogene Gerade mit der z-Axe bildet. Bezeichnen wir die Werthe dieses Winkels für die Endpunkte des linearen Leiters mit den Bogen 0 und l bezüglich durch φ_1' und φ_2', so ist also:

$$\int_0^l (X'Dx + Y'Dy + Z'Dz)\,ds = \frac{q\,d\alpha}{\sqrt{2}}\,(\cos\varphi_2' - \cos\varphi_1').$$

Aus dem letzten Ausdrucke erhält man den analogen Ausdruck für den Südpol, wenn man das Vorzeichen von q umkehrt und an die Stelle von φ_1' und φ_2' die entsprechenden Winkel φ_1'' und φ_2'' für den Südpol einsetzt. Die Summe jener beiden Ausdrücke ist aber gleich dem Integrale in der Formel für den Inductionsstrom; daher ergiebt sich endlich für das Quantum jenes Stromes, wenn noch für $d\alpha : dt$, d. i. die Winkelgeschwindigkeit des Magneten, der Buchstabe u gesetzt wird:

$$I = \frac{\sqrt{2}\,\lambda q u}{w}\,(\cos\varphi_1' - \cos\varphi_2' + \cos\varphi_2'' - \cos\varphi_1'').$$

Die Folgerungen, welche sich aus dieser Formel ziehen lassen, stehen, soweit eine Vergleichung gestattet ist, mit der Beobachtung vollkommen in Einklang.

d. Dämpfung einer Multiplicatornadel. Bestimmung der Constante in der Weber'schen Fundamentalformel.

Eine oscillirende Magnetnadel erregt in nahe gelegenen Leitern Inductionsströme, deren Rückwirkung auf die Nadel sich durch eine Verzögerung ihrer Bewegung verräth. Wenn man z. B. die Nadel eines Multiplicators, während die Drahtleitung in sich geschlossen ist, in Schwingungen versetzt, so werden die

Amplituden kleiner ausfallen und rascher abnehmen, als wenn man der Nadel nach Entfernung der sie umgebenden Metallmassen unter übrigens gleichen Umständen dieselbe Bewegung mittheilt. Die Verzögerung oder Dämpfung der Multiplicatornadel erleichtert und schärft in manchen Versuchen die Beobachtung, und daher ruft man sie oft absichtlich dadurch hervor, dass man die Nadel mit nicht magnetischen, gut leitenden Metallstücken, ins Besondere mit einem Kupfergehäuse, umgiebt. Es soll nun hier der Einfluss näher untersucht werden, welchen die Dämpfung auf die Bewegung einer Multiplicatornadel in dem Falle ausübt, wo letztere nur der Wirkung des Erdmagnetismus und der Torsion des Aufhängungsfadens ausgesetzt ist, und wo die Amplituden als sehr klein betrachtet werden dürfen.

Zuvörderst leuchtet ein, dass sich bei einem regelmässig gebauten Multiplicator die Wirkung der dämpfenden Inductionsströmung auf die Nadel in jedem Momente durch ein horizontales Gegenpaar darstellen lasse. Das Moment dieses Gegenpaares ist bei einem und demselben Multiplicator annähernd mit der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit der Nadel proportional. Die Inductionsströmung kann nämlich als Resultante der Strömungen betrachtet werden, welche von den einzelnen magnetischen Elementen der Nadel erzeugt werden. Die Strömungscurven einer solchen componirenden Strömung bleiben aber wegen der Annahme über die Grösse der Amplituden nahezu constant, und desshalb wird wie bei der Induction in einem Systeme von linearen Leitern die Stärke der Strömung in jedem Punkte der Leitung fortwährend mit der Geschwindigkeit des betreffenden magnetischen Elementes und daher auch mit der Winkelgeschwindigkeit der Nadel annähernd proportional sein. Aus diesem Grunde und weil die Nadel stets in der Nähe ihrer Gleichgewichtslage bleibt, kann auch die Wirkung der ganzen Inductionsströmung auf die Nadel als annähernd proportional mit der Winkelgeschwindigkeit der letztern angenommen werden. Es lässt sich nunmehr die Bewegung der Nadel wie folgt finden.

Der Bogen des Ausschlags der Nadel zur Zeit t werde durch ψ bezeichnet. Ferner sei H die horizontale Componente des Erdmagnetismus, m das magnetische Moment der Nadel und

τ die Torsion des Aufhängungsfadens. Man erhält alsdann mit Rücksicht auf die Annahme über die Grösse der Amplituden für das horizontale Gegenpaar, welches den hier in Betracht kommenden Theil der Wirkung des Erdmagnetismus und der Torsion auf die Nadel darstellt und in gleichem Sinne mit dem Ausschlage gerechnet werde, den Ausdruck $-(mH+\tau)\,\psi$, wofür kürzehalber $-G\psi$ gesetzt werde. Das Gegenpaar der Dämpfung lässt sich nach den oben gemachten Bemerkungen darstellen durch $-\gamma\frac{d\psi}{dt}$, unter γ eine nur von dem Bau des Multiplicators abhängige, positive Grösse verstanden. Wenn nun noch durch k das Trägheitsmoment der Nadel in Bezug auf ihre Drehaxe bezeichnet wird, so ergiebt sich zur Bestimmung der Bewegung der Nadel folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten:

$$k\frac{d^2\psi}{dt^2}+\gamma\frac{d\psi}{dt}+G\psi=0.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert in der Annahme, dass die Zeit von einem Durchgange der Nadel durch ihre Gleichgewichtslage an gerechnet werde:

$$\psi=ae^{-\frac{2\pi}{\eta}t}\sin\frac{2\pi}{\varDelta}t,$$

wo a eine Integrationsconstante ist, die Grössen $\varDelta$ und η aber den beiden folgenden Gleichungen zu entnehmen sind:

$$\frac{2\pi}{\eta}=\frac{\gamma}{2k},\quad\left(\frac{2\pi}{\varDelta}\right)^2+\left(\frac{2\pi}{\eta}\right)^2=\frac{G}{k}.$$

In Uebereinstimmung mit der Beobachtung ergiebt sich aus der Formel für den Ausschlag, dass die auf einander folgenden Amplituden eine abnehmende geometrische Reihe bilden. Der Quotient dieser Reihe ist $e^{-\frac{\varDelta\pi}{\eta}}$, so dass aus der Beobachtung auf einander folgender Amplituden der Werth der Grösse $\frac{\varDelta\pi}{\eta}$, des sogenannten logarithmischen Decrementes, ermittelt werden kann. Die Oscillationsdauer $\varDelta$, d. h. die Zeit zwischen zwei auf einander folgenden, gleichgerichteten, grössten Ausschlägen oder zwischen zwei auf einander folgenden gleichgerichteten Durchgängen durch die Gleichgewichtslage bleibt constant.

In dem besondern Falle, wo die Nadel durch den Anstoss einer elektrischen Strömung im Multiplicatordrahte von kurzer Dauer aus der Gleichgewichtslage herausgetrieben und in Bewegung gesetzt wird, lässt sich mit Hülfe der gewonnenen Resultate die Relation zwischen den Amplituden und den strömenden elektrischen Massen wie folgt finden. Es werde der Multiplicator in der einen Richtung von dem elektrischen Quantum Q oder, was auf dasselbe hinauskommt, in entgegengesetzten Richtungen von den Quanta $+\frac{1}{2}Q$, $-\frac{1}{2}Q$ durchflossen. Durch den Impuls der Strömung erlange die Nadel die Winkelgeschwindigkeit C. Alsdann hat man (vergl. II. 2.), unter N eine von der Einrichtung des Multiplicators abhängige, übrigens aber constante Grösse verstanden:

$$C = \frac{2\lambda m NQ}{k}.$$

Andererseits ergiebt sich aus dem Nächstvorhergehenden für die erste und grösste Amplitude Ψ, wenn das logarithmische Decrement durch ω bezeichnet wird:

$$\Psi = C\sqrt{\frac{k}{G}}\, e^{-\frac{\omega}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\omega}}.$$

Die beiden letzten Gleichungen liefern nun:

$$\Psi = \frac{4\lambda NPQ}{H},$$

wo, unter θ den Quotienten $\tau : mH$ verstanden, zu setzen ist:

$$P = \frac{\sqrt{\pi^2 + \omega^2}}{(1+\theta)\varDelta}\, e^{-\frac{\omega}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\omega}}.$$

Es ist hier der Ort, einer Untersuchung von Weber und Kohlrausch (Elektrodynamische Maassbestimmungen, ins Besondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. Abh. d. K. Sächs. Ges. der Wissenschaften. V.) zu gedenken, als deren Ziel von theoretischem Standpunkte die Bestimmung der Constante in der Weber'schen Fundamentalformel bezeichnet werden kann. Das Verfahren der genannten Forscher bestand im Wesentlichen darin, dass eine vorläufig gemessene Menge Elektricität durch den Draht eines Multiplicators nach der Erde hin abgeleitet und die erste und grösste Amplitude der durch den Impuls der strömenden Elektricität in

Bewegung gesetzten Nadel ermittelt wurde. Aus den beiden so gewonnenen Grössen, der horizontalen Componente des Erdmagnetismus und den Daten des Multiplicators konnte sodann mittelst der oben gefundenen Formel für die erste Amplitude auf die fragliche Constante geschlossen werden. Um aber, wie erforderlich, die Menge der abgeleiteten Elektricität nach absolutem Maasse zu bestimmen, schlugen Weber und Kohlrausch folgenden Weg ein. Sie luden eine Leydener Flasche von schicklicher Grösse und bestimmten nach der Methode, welche im letzten Capitel der Elektrostatik auseinandergesetzt wurde, die Quantität ihrer Ladung. Hierauf entluden sie die Flasche dadurch, dass sie das eine Ende des Multiplicatordrahtes mit der inneren Belegung in Berührung brachten, während die äussere Belegung und das andere Ende des Drahtes mit der Erde in Verbindung standen. So strömte dann die gemessene Ladung der inneren Belegung durch den Multiplicator nach der Erde hin. Die Amplituden der Nadel wurden mittelst Spiegel, Fernrohr und Skale beobachtet.

Der Multiplicator, dessen sich Weber und Kohlrausch bedienten, hatte dieselbe Form, wie wir sie beispielsweise den Betrachtungen in II. 2. zu Grunde gelegt haben. Die Radien seiner Drahtrolle, welche 5635 Windungen enthielt, betrugen 11,284 und 15,364 Centimeter, die Dicke der Rolle oder die Entfernung ihrer Endflächen von einander maass 7,204 Centimeter. Ferner wurde der Abstand der Pole der Nadel von einander annähernd zu 4 Centimeter bestimmt. Aus diesen Daten ergiebt sich:

$$N = 1853{,}5.$$

Für die übrigen hier in Betracht kommenden Constanten des Multiplicators lieferte die Beobachtung folgende Werthe:

$$\Delta = 18{,}488, \quad \theta = 0{,}00145, \quad \omega = 0{,}070,$$

und hieraus berechnet sich:

$$P = 0{,}16397.$$

Es war ferner für den Ort der Beobachtung:

$$H = 0{,}17983.$$

Die weiteren Ergebnisse, zu welchen Weber und Kohlrausch gelangten, sind in der folgenden Tabelle zusammenge-

stellt. Die beiden ersten Columnen enthalten die durch den Multiplicator geschickten Elektricitätsmengen Q und die entsprechenden Amplituden Ψ der Nadel. In der dritten Columne findet man die reciproken Werthe der Constante λ, wie sie sich aus je zwei zu einander gehörenden Werthen von Q und Ψ und den oben erwähnten Werthen von H, N und P berechnen.

Q	Ψ	$1:\lambda$
36060	0,0057087	$427 . 10^8$
41940	0,0062136	$456 . 10^8$
49700	0,0074952	$448 . 10^8$
44350	0,0070757	$424 . 10^8$
49660	0,0075962	$442 . 10^8$

Die Grösse $1:\lambda$ stellt nach der Weber'schen Grundformel die relative Geschwindigkeit dar, mit welcher sich zwei elektrische Massen gegen einander hinbewegen oder von einander entfernen müssen, damit die gegenseitige Wirkung der Massen verschwinde. Aus den oben mitgetheilten Versuchen folgt, dass diese Geschwindigkeit für die Secunde als Zeiteinheit 439 Millionen Meter beträgt.

e. Bestimmung des absoluten Fortpflanzungscoefficienten für Elektricität.

In dem Ausdrucke für die Intensität des Integralstromes, welcher in einem linearen Leiter durch relative Bewegung inducirt wird, tritt neben der Constante λ und dem Potential des Inducenten in Bezug auf den Leiter auch noch der absolute Widerstand des letzteren auf. Durch Vergleichung ergebe sich nun, dass jener Widerstand gleichkommt dem eines Drahtes aus bestimmtem Stoffe von bestimmter Länge und bestimmtem Querschnitt. Alsdann hat man, wenn der absolute Fortpflanzungscoefficient jenes Stoffes durch $\varkappa$ und der Quotient aus dem Querschnitt in die Länge des Drahtes durch u bezeichnet, übrigens aber die frühere Bezeichnung beibehalten wird:

$$j = -\frac{8\varkappa\lambda^2}{u}(W - W_0).$$

Die Beobachtung der Grössen j, u und $W - W_0$ liefert also die Constante $\varkappa\lambda^2$, und hiernach kann auch, da die Constante λ bekannt ist, der Fortpflanzungscoefficient $\varkappa$ gefunden werden. Aus dem Werthe des Fortpflanzungscoefficienten für einen bestimmten Stoff wird aber ferner der für irgend einen zweiten Stoff erhalten, wenn man jenen mit dem leicht zu bestimmenden Quotienten aus der Leitungsfähigkeit des ersten Stoffes in die Leitungsfähigkeit des zweiten Stoffes multiplicirt.

Ueber den Werth der Constante $\varkappa\lambda^2$ für Kupfer hat zuerst eine Untersuchung von Kirchhoff (Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducirter elektrischer Ströme abhängt. Pogg. Ann. LXXVII.) Aufschluss gegeben. Fernere Bestimmungen wurden durch Versuche von Weber (Elektrodyn. Maassbest. ins Besondere Widerstandsmessungen) gewonnen. Die Uebereinstimmung in den Ergebnissen beider Forscher ist mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der angewandten Methoden und der Verhältnisse, unter welchen die Versuche angestellt wurden, hinreichend, um als Beleg für die Richtigkeit der theoretischen Formeln, welche der Deutung der Versuche zu Grunde gelegt wurden, dienen zu können. Wir wollen nun zunächst die Hauptmomente und Ergebnisse der Untersuchung Kirchhoff's auseinandersetzen.

Es wurde eine Leitung hergestellt, die bestand aus einer galvanischen Kette K, einem Multiplicator M, zwei Drahtrollen R und R' und einem Verbindungsstücke S, von dem ein Ende A in der Verbindung von K und M, das andere Ende B in der Verbindung von R und R' lag. Ohne das Stück S würde der Strom der Kette den Weg $KMRR'K$ verfolgt haben. Durch Einschaltung des Stückes S, dessen Widerstand in Vergleich mit dem der Leitung $AMRB$ sehr klein war, wurde bewirkt, dass der Strom grösstentheils durch S floss und dass nur ein kleiner Theil desselben nach dem Multiplicator hinging.

Die Rolle R war fest und zur Verstärkung der Induction, welche hervorgerufen und beobachtet werden sollte, aus zwei gleich hohen cylindrisch-ringförmigen Rollen r_1 und r_2, deren Axen und Mittelpunkte zusammenfielen, und die durch einen

Zwischenraum von einander getrennt waren, zusammengesetzt. Die Enden der Rollen r_1 und r_2 waren so verbunden, dass sich der Strom in sie verzweigte und sie in gleichem Sinne durchlief. In dem erwähnten Zwischenraume der Rolle R befand sich die gleichfalls cylindrisch-ringförmige Rolle R', und diese konnte mittelst Fäden und Rollen rasch in eine solche Höhe gehoben werden, dass keine merkliche gegenseitige Einwirkung der Rollen stattfand.

Bei der Hebung der Rolle R' inducirte erstlich R in R' einen Strom, von dem der grösste Theil durch S, nur ein kleiner Theil durch M floss. Es inducirte aber zweitens auch die Rolle R' in R einen Strom, der durch M floss. Zunächst soll nun die Intensität des letzten Integralstromes, gegen welche die des ersten vernachlässigt werden konnte, theoretisch bestimmt werden. Die Intensität des primitiven Stromes werde durch i', das Potential der Rolle R' in Bezug auf r_1 und r_2 für die Anfangslage bezüglich durch W_1 und W_2 bezeichnet. Ferner seien w_1 und w_2 die Widerstände in r_1 und r_2, endlich w der Widerstand in der Leitung $RMABR$. Alsdann findet man nach dem Früheren für die Intensitäten der Integralströme in M, welche durch die Einwirkung von R' auf r_1 und r_2 erzeugt werden:

$$\frac{8\lambda^2 i' w_2 W_1}{w w_1 + w_1 w_2 + w_2 w}, \quad \frac{8\lambda^2 i' w_1 W_2}{w w_1 + w_1 w_2 + w_2 w}.$$

Setzt man abkürzend:

$$\frac{w w_1 + w_1 w_2 + w_2 w}{w_1 + w_2} = \mathrm{w},$$

da denn w den Widerstand der Leitung $AMRBA$ darstellt, sowie ferner:

$$\frac{w_2 W_1 + w_1 W_2}{w_1 + w_2} = W,$$

so kommt nach dem Obigen für die Intensität des ganzen durch M fliessenden Integralstromes:

$$j = \frac{8\lambda^2 i'}{\mathrm{w}} W.$$

Man bemerke noch, dass der Quotient $i' : \mathrm{w}$ annähernd gleich ist dem Quotienten aus dem Widerstande des Verbindungsstückes S in die Intensität des durch den Multiplicator fliessenden Zwei-

ges des primitiven Stromes. Diese Intensität werde durch i bezeichnet. Ferner sei u der Quotient aus dem Querschnitte in die Länge eines Kupferdrahtes, dessen Widerstand dem des Stückes S gleichkommt, und $\varkappa$ der Fortpflanzungscoefficient des Kupfers. Alsdann kann also gesetzt werden:

$$j = \frac{8\varkappa\lambda^2 i}{u} W.$$

Der letzten Formel zufolge reichte zur Bestimmung der Constante $\varkappa\lambda^2$ die Ermittelung der drei Grössen $j:i$, u und W hin. Der Potentialausdruck W konnte aus den Dimensionen und der Anzahl der Windungen der Rollen r_1, r_2 und R' nebst dem Verhältniss der Widerstände der beiden ersten Rollen berechnet werden. Ferner konnte, wie wir sehen werden, bei der getroffenen Anordnung das Verhältniss $j:i$ gefunden werden, ohne dass die einzelnen Intensitäten bestimmt zu werden brauchten. Die Grösse u liess sich nicht mit hinreichender Genauigkeit ermitteln. Daher hatte Kirchhoff eine Einrichtung getroffen, wodurch die Verbindung S so geändert werden konnte, dass eine genaue Bestimmung der damit verbundenen Aenderung von u möglich war. Aus den Werthen des Verhältnisses $j:i$ für zwei verschiedene Werthe von u und der Differenz der letzteren konnte sodann die Constante $\varkappa\lambda^2$ gefunden werden. Beziehen sich nämlich die Marken 1 und 2 auf zwei verschiedene Versuche, so ist, wie die letzte Formel für den Integralstrom liefert:

$$\varkappa\lambda^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{u_1 - u_2}{W} : \left(\frac{i_1}{j_1} - \frac{i_2}{j_2}\right).$$

Es erübrigt nunmehr noch das Verfahren auseinanderzusetzen, wodurch Kirchhoff das Verhältniss $j:i$ bestimmte. Der galvanische Strom wurde hergestellt. Der Magnetstab des Multiplicators begann alsdann um eine neue Gleichgewichtslage herum zu schwingen. In einem der Zeitpunkte, wo der Magnet durch seine neue Gleichgewichtslage hindurchging und zwar in der Richtung des Impulses, welchen der Inductionsstrom zu ertheilen vermochte, wurde die bewegliche Rolle rasch gehoben und so der Inductionsstrom hervorgerufen. Dies bewirkte, dass der Magnet eine Amplitude Ψ' erreichte, welche die Amplitude Ψ, zu der er ohne die Wirkung des Inductionsstromes gelangt

wäre, an Grösse übertraf. Aus den Amplituden Ψ und Ψ', der Ablenkung α, welche der Magnet durch den primitiven Strom erlitt, der Oscillationsdauer und dem logarithmischen Decremente lässt sich nun das fragliche Verhältniss wie folgt finden. Da die Ablenkung α sehr klein war, so gelten in erster Annäherung für die Bewegung des Magneten um seine neue Gleichgewichtslage dieselben Gesetze wie für die Bewegung um die ursprüngliche Gleichgewichtslage in dem Falle, wo durch den Multiplicator kein Strom hindurchgeht, seine Leitung aber geschlossen ist. Bezeichnen wir also durch C und C' die Winkelgeschwindigkeiten des Magneten in der Gleichgewichtslage, welche den Amplituden Ψ und Ψ' entsprechen, sowie durch $\mathfrak{C}$ die Winkelgeschwindigkeit, welche der inducirte Strom für sich allein dem Magneten mittheilen würde, so ist, wenn übrigens den Grössen ω, k und G dieselbe Bedeutung wie früher beigelegt wird:

$$\mathfrak{C} = C' - C = (\Psi' - \Psi)\sqrt{\frac{G}{k}}\, e^{\frac{\omega}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\omega}}.$$

Man hat nun ferner (s. II. 2. und IV. 3. d.):

$$\mathfrak{C} = \frac{j m N}{k}, \quad \alpha = \frac{\mathrm{i} m N}{G},$$

und wenn Δ_0 die Dauer einer ganzen Oscillation des Magneten bei geöffnetem Multiplicator bedeutet:

$$\left(\frac{2\pi}{\Delta_0}\right)^2 = \frac{G}{k}.$$

Es ist folglich:

$$\frac{j}{\mathrm{i}} = \frac{\Psi' - \Psi}{\alpha} \cdot \frac{\Delta_0}{2\pi} e^{\frac{\omega}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\omega}}.$$

Mit Rücksicht auf dies Ergebniss kann die Formel für $\varkappa\lambda^2$ wie folgt geschrieben werden, wenn der Quotient $(\Psi' - \Psi) : \alpha$ durch a bezeichnet wird und die Marken 1 und 2 sich wiederum auf verschiedene Versuche beziehen:

$$\varkappa\lambda^2 = \frac{\Delta_0}{16\pi} \cdot \frac{e^{\frac{\omega}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\omega}}}{W} \cdot \frac{u_1 - u_2}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}}.$$

Wir lassen nunmehr die Ergebnisse der Versuche Kirchhoff's folgen. Es wurde für den Potentialausdruck gefunden:

$$W = 6232600.$$

Für die in Betracht kommenden Constanten des Multiplicators wurde erhalten:

$$\Delta_0 = 14{,}19, \ \omega = 0{,}061.$$

Endlich lieferten zwei verschiedene Versuchsreihen:

$$a_1 = 1{,}003, \ a_2 = 17{,}100, \ u_1 - u_2 = 1911{,}2.$$

Aus diesen Werthen berechnet sich:

$$\varkappa \lambda^2 = 951 . 10^{-7}.$$

An die vorhergehende Bestimmung reihen wir das Ergebniss einer der oben erwähnten Untersuchungen Weber's. Der angewandte Apparat bestand aus einer vertical stehenden, ringförmigen Drahtrolle, die um ihren verticalen Durchmesser gedreht werden konnte, und einem Multiplicator, dessen Drahtenden mit den Enden der Drahtrolle verbunden waren. Wurde die Rolle um ihre Axe herum gedreht, so inducirte der Magnetismus der Erde in ihr einen elektrischen Strom, welcher sich durch seine Wirkung auf die Multiplicatornadel verrieth. Weber ermittelte nun den Ausschlag der Multiplicatornadel für den Fall, dass die Drahtrolle ursprünglich mit dem magnetischen Meridiane parallel stand und sodann plötzlich um 90^0 gedreht wurde. Ausserdem bestimmte er die Torsionsconstante, die Oscillationsdauer und die Constante N des Multiplicators, ferner die ideale Fläche der Drahtrolle, das Verhältniss der horizontalen Componenten des Erdmagnetismus an der Stelle der Rolle und des Multiplicators und endlich das Verhältniss zwischen dem Widerstande der Leitung und dem des Jacobi'schen Widerstands-Etalons. Aus diesen Grössen konnte die Constante $\varkappa \lambda^2$ für Kupfer wie folgt gefunden werden.

Es sei H die horizontale Componente des Erdmagnetismus an der Stelle der Rolle und F die ideale Fläche der letzteren; alsdann hat man für das Potential des Erdmagnetismus in Bezug auf die Drahtrolle in der Lage, wo sie auf dem Meridiane senkrecht steht:

$$\mathrm{W} = \frac{FH}{\sqrt{2}}.$$

Hiernach ergiebt sich für die Intensität des Integralstromes, welcher durch die oben näher angegebene Bewegung der Rolle inducirt wird:

$$j = \frac{4\sqrt{2}\,\varkappa\lambda^2 F H}{u}.$$

Bedeutet nun ferner Ψ den Bogen des Ausschlags, welchen die Multiplicatornadel in Folge der Wirkung des Inductionsstromes macht, und H' die horizontale Componente des Erdmagnetismus an der Stelle des Multiplicators, so kommt, da die Dämpfung der Nadel vernachlässigt werden konnte:

$$\Psi = \frac{2\pi j N}{(1+\theta)\,\varDelta H'},$$

wo den Buchstaben θ, $\varDelta$ und N dieselbe Bedeutung wie bisher beizulegen ist. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\varkappa\lambda^2 = \frac{1}{8\sqrt{2}\,\pi} \cdot \frac{(1+\theta)\,\varDelta u}{F N} \cdot \frac{H'}{H}\,\Psi.$$

Weber erhielt nun für den Multiplicator:

$$\theta = 0{,}00056,\ \varDelta = 20{,}5636,\ N = 234{,}1.$$

Ferner wurde gefunden:

$$F = 1049240,\ \frac{H}{H'} = 0{,}99787,$$

und, unter u_0 den Quotienten aus dem Querschnitt in die Länge des Jacobi'schen Widerstands-Etalons verstanden:

$$u = 36{,}142\ u_0.$$

Endlich ergab sich als Mittel aus mehreren Versuchsreihen:

$$\Psi = 0{,}0048869.$$

Aus diesen Daten berechnet sich:

$$\varkappa\lambda^2 = 910 \,.\, 10^{-7}.$$

Die Werthe der Constante $\varkappa\lambda^2$ für Kupfer, wie sie sich aus den oben erörterten Bestimmungen ergeben haben, liefern in Verbindung mit dem bekannten Werthe der Constante λ für den Fortpflanzungscoefficienten des Kupfers bezüglich die Werthe $183 \,.\, 10^{15}$ und $175 \,.\, 10^{15}$. Bei der Vergleichung dieser Resultate muss noch berücksichtigt werden, dass die Versuche Kirchhoff's bei einer Temperatur von einigen Graden über Null angestellt wurden, während sich die Bestimmungen Weber's auf eine Temperatur von 25^0 beziehen, sowie ferner, dass sich die Leitungsfähigkeiten der von Kirchhoff und Weber zur Vergleichung der Widerstände gebrauchten Kupferdrähte zu einan-

der wie 929:1000 verhielten, wie sich durch directe Vergleichung ergab.

4. Ueber die Bewegung von Systemen linearer elektrischer Ströme und Magnete, mit besonderer Rücksicht auf chemische Action und Wärmeentwickelung.

Aus den Gesetzen der Induction linearer elektrischer Ströme lassen sich für die Bewegung von Systemen, welche aus linearen Strömen und Magneten zusammengesetzt sind, unter gewissen Einschränkungen mehrere bemerkenswerthe allgemeine Gesetze herleiten, welche wir aber hier nur für bestimmte einfachere Formen solcher Systeme entwickeln wollen. Mit jenen Einschränkungen sind aber die folgenden gemeint. Es soll zuvörderst unterstellt werden, dass nur geschlossene lineare elektrische Strömungen in Betracht kommen. Ferner werde angenommen, dass diejenigen Bestandtheile der Systeme, welche einer magnetischen Erregung fähig sind, sich in dieser Beziehung so verhalten wie vollkommen weiches Eisen oder Wismuth für kleinere vertheilende Kräfte. Von den elektrischen Erregungen sollen nur die in den Rheophoren stattfindenden, von den magnetischen aber nur die in den temporären Magneten stattfindenden berücksichtigt werden. Endlich möge in Betreff der Aenderungen der Systeme unterstellt werden, dass die elektromotorischen und magnetisirenden Kräfte im Verlaufe der Zeit nicht so rasch wechseln, dass nicht über die Anordnung der freien Elektricität an der Oberfläche der Leiter die früher gemachten Annahmen zulässig seien, sowie auch die Annahme, dass der magnetische Zustand der auftretenden temporären Magnete in jedem Zeitpunkte den vertheilenden Kräften als Gleichgewichtszustand entspreche.

a. Bewegung zweier linearer elektrischer Ströme.

Es seien gegeben zwei in Bewegung begriffene, starre, lineare, geschlossene Leiter, welche von zwei durch chemische Wirkung erzeugten elektrischen Strömen durchflossen werden. Die primitiven Intensitäten dieser Ströme, wie sie aufträten, wenn eine Wechselwirkung zwischen ihnen nicht stattfände, seien zur Zeit t gleich i_1 und i_2 und die entsprechenden Quanta positiver Elektricität, welche während der Zeiteinheit durch die Querschnitte fliessen würden, wenn die Intensitäten zur Zeit t erhalten blieben, seien I_1 und I_2. Die Widerstände der Leiter seien w_1 und w_2, und das Potential des einen Leiters in Bezug auf den andern sei W. Ferner mögen durch i_1 und i_2 die Intensitäten und durch

$$J_1 = I_1 + \Delta I_1, \quad J_2 = I_2 + \Delta I_2$$

die Stromquanta bezeichnet werden, welche den zur Zeit t wirklich auftretenden Strömen entsprechen, so dass also ΔI_1 und ΔI_2 die Stromquanta der inducirten Ströme darstellen. Man hat alsdann dem Früheren zufolge:

$$\Delta I_1 = -\frac{2\lambda}{w_1} \cdot \frac{d(i_2 W)}{dt}, \quad \Delta I_2 = -\frac{2\lambda}{w_2} \cdot \frac{d(i_1 W)}{dt}.$$

Da nun die Intensität durch Multiplication des Stromquantums mit 4λ gewonnen wird, so ist:

$$i_1 = \mathrm{i}_1 - \frac{8\lambda^2}{w_1} \cdot \frac{d(i_2 W)}{dt}, \quad i_2 = \mathrm{i}_2 - \frac{8\lambda^2}{w_2} \cdot \frac{d(i_1 W)}{dt}.$$

Durch successive Substitutionen findet man hieraus folgende Reihenentwickelungen, mittelst deren sich die Intensitäten der Ströme aus den primitiven Intensitäten und aus den Aenderungen der relativen Lage der Rheophore herleiten lassen:

$$i_1 = \mathrm{i}_1 - \frac{8\lambda^2}{w_1} \cdot \frac{d(\mathrm{i}_2 W)}{dt} + \frac{64\lambda^4}{w_1 w_2} \cdot \frac{d\left(W \frac{d[\mathrm{i}_1 W]}{dt}\right)}{dt} - \ldots\ldots$$

$$i_2 = \mathrm{i}_2 - \frac{8\lambda^2}{w_2} \cdot \frac{d(\mathrm{i}_1 W)}{dt} + \frac{64\lambda^4}{w_2 w_1} \cdot \frac{d\left(W \frac{d[\mathrm{i}_2 W]}{dt}\right)}{dt} - \ldots\ldots$$

Die Hälfte der lebendigen Kraft, welche während einer be-

stimmten Zeit in dem betrachteten Systeme durch die Wirkung der elektrischen Kräfte gewonnen wird, kommt in Gemässheit des Principes von der Erhaltung der Kraft der Arbeit gleich, welche von jenen Kräften während derselben Zeit geleistet wird. Von den elektrischen Kräften kommen nur in Betracht die Kräfte, welche zwischen den fliessenden elektrischen Massen eines Rheophors und den an der Oberfläche desselben befindlichen elektrischen Massen wirken, sowie ferner die Kräfte, welche zwischen den fliessenden Massen des einen und andern Stromes thätig sind. Die letzt genannten Kräfte aber lassen sich ansehen als zusammengesetzt aus den Kräften, welche zwischen den Strömen, solche als constant und in constanter relativer Lage gedacht, wirken, und den elektromotorischen Kräften, welche aus der Aenderung der relativen Lage und der Intensität entspringen. Es sei nun für eine bestimmte Zeit t und einen bestimmten Punkt O des einen Stromes P die Kraft, welche von der an der Oberfläche befindlichen Elektricität ausgeht, und deren Richtung mit der Stromrichtung zusammenfällt. Für dieselbe Zeit und denselben Punkt sei P' die Kraft, mit welcher die fliessende Elektricität des zweiten Stromes — diesen als constant und in constanter Lage gegen den ersten gedacht — auf die fliessende Elektricität des ersten Stromes einwirkt. Die elektromotorische Kraft, welche aus der Aenderung der relativen Lage der Leiter und aus der Aenderung der Intensität des zweiten Stromes für den ersten Strom hervorgeht, sei P''. Ferner werde durch dq ein in O befindliches elektrisches Quantum des ersten Stromes bezeichnet, und dies Quantum beschreibe während der Zeit von t bis $t + dt$ das Leiterelement ds, während zugleich ein Punkt des letzteren den Weg $d\sigma$ zurücklegt. Endlich sei φ' der Winkel zwischen P' und $d\sigma$, φ'' der Winkel zwischen P'' und ds. Alsdann stellt der Ausdruck:

$$dq\,(P\,ds + P' \cos\varphi'\, d\sigma + P'' \cos\varphi''\, ds)$$

die Arbeit dar, welche die an dq angreifenden Kräfte während der Zeit von t bis $t + dt$ leisten, denn von den Kräften P' und P'' steht jene auf ds, diese auf $d\sigma$ senkrecht. Wir schliessen hieraus: Die Arbeit, welche sämmtliche in Betracht kommende elektrische Kräfte leisten, setzt sich zusammen aus der Arbeit der Kräfte, welche nach der Ampère'schen Formel die Wir-

kung des einen Stromes auf den andern darstellen, und der Arbeit, welche von den Kräften der Oberflächen-Elektricität in den ruhenden Leitern geleistet würde, wenn diese von zwei Strömen durchflossen würden, die in jedem Momente den in den bewegten Leitern wirklich auftretenden Strömen an Intensität gleichkommen. Als Aequivalent des erst erwähnten Theiles der Gesammtarbeit ist die während der Bewegung gewonnene halbe lebendige Kraft der ponderablen Materie der Leiter und der mit denselben etwa noch verbundenen in elektrischer Beziehung indifferenten Massen zu betrachten; als Aequivalent dagegen des zweiten Theiles der Gesammtarbeit ist die Hälfte der lebendigen Kraft der in den Leitern durch die elektrische Strömung entwickelten Wärmebewegung anzusehen. Es sei nun dC die Hälfte der lebendigen Kraft der in beiden Leitern durch die elektrische Strömung während der Zeit dt hervorgerufenen Wärmebewegung, dL die Hälfte des Gewinnes der ponderablen Materie an lebendiger Kraft; alsdann ist:

$$dC = 2w_1 J_1^2 dt + 2w_2 J_2^2 dt, \quad dL = i_1 i_2 dW.$$

Bei einem constanten, linearen, hydroelektrischen Strome ist nach dem Ohm'schen Gesetze das Product aus dem Widerstande w und dem Stromquantum I lediglich von der Natur und Anordnung der Theile, aus welchen die ganze Leitung zusammengesetzt ist, abhängig. Bezeichnen wir das Doppelte jenes Productes durch X, so ist:

$$XI = 2wI^2.$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung auftretende Grösse ist, wie bei Erörterung des Lenz-Joule'schen Gesetzes gezeigt wurde, die Hälfte der lebendigen Kraft der Wärmebewegung, welche während der Zeiteinheit in der Stromleitung erzeugt wird. Das linkerhand auftretende Product fassen wir auf als Ausdruck für die Arbeit, welche die bei den chemischen Processen im Strome thätigen chemischen Kräfte während der Zeiteinheit leisten. Diese Grösse ist proportional mit der in gleicher Zeit zerlegten Quantität eines Elektrolyten, sowie auch mit der Quantität eines bei der Zerlegung ausgeschiedenen oder verzehrten Bestandtheiles, sowie auch endlich mit der Quantität einer bei der Elektrolyse gebildeten Verbindung, indem diese Mengen mit der Stromintensität proportional sind. Die Wärme-

menge, welche sich in der ganzen Leitung eines Stromes bei gleicher chemischer Action entwickelt, d. h. während gleiche Mengen eines bestimmten Bestandtheiles ausgeschieden oder verzehrt werden, muss nach dem Obigen gleich bleiben, wenn bloss der Widerstand geändert wird. Dies gilt auch dann noch, wenn durch eine secundäre Wirkung eine locale Wärmeentwickelung stattfindet, wofern nur hierbei die entwickelte (oder auch absorbirte) Wärme mit der Intensität des Stromes proportional bleibt. Eine derartige locale Wärmeentwickelung scheint einzutreten, so oft die Elektrolyse mit einer Gasentwickelung verknüpft ist. Wir wollen aber hier nur Ströme im Auge behalten, in welchen keine Gasentwickelung stattfindet, wie solches z. B. bei der Daniell'schen Kette der Fall ist.

Wenn die Grössen X und I sich mit der Zeit ändern, jedoch so, dass der Strom stets die Beschaffenheit bewahrt, welche für die hier zu betrachtenden Ströme unterstellt wurde, so bleibt die Gleichheit zwischen der Arbeit der chemischen Kräfte und der gewonnenen Wärme — gemessen durch die Hälfte ihrer lebendigen Kraft — bestehen, d. h. es ist für eine verschwindend kleine Zeit dt:

$$XIdt = 2wI^2dt.$$

Bei einem galvanischen Strome, in dessen Leitung äussere elektromotorische Kräfte neben dem primitiven Strome eine neue Strömung induciren, wird die Arbeit, welche die chemischen Kräfte während der Zeit dt leisten, durch $XJdt$ darzustellen sein, wenn J das der betreffenden Zeit entsprechende Stromquantum und X das doppelte Product aus dem Widerstande und dem Stromquantum des primitiven Stromes bedeutet, hierbei unterstellt, dass die Richtung des resultirenden Stromes dieselbe wie die des primitiven ist.

Durch das Auftreten der inducirten Strömung wird nämlich in diesem Falle, auf welchen wir uns beschränken wollen, die Art der Elektrolyse nicht geändert, und die zerlegte Quantität eines Elektrolyten bleibt in einem constanten Strome, dessen Leitung von einem constanten inducirten Strome durchflossen wird, aller Wahrscheinlichkeit nach mit der Summe der Intensitäten dieser Ströme proportional. Die Gleichheit zwischen der Arbeit der chemischen Kräfte und der gewonnenen Wärme fin-

det aber hier nicht mehr statt, und es soll jetzt die Beziehung zwischen diesen beiden Grössen für den Fall der Bewegung zweier linearer Ströme, wo Verhältnisse von der soeben erwähnten Art auftreten, ermittelt werden.

Für die Summe dH der Arbeit, welche in beiden Strömen während der Zeit dt seitens der chemischen Kräfte geleistet wird, setzen wir nach dem Vorhergehenden:

$$dH = 2w_1 I_1 J_1 dt + 2w_2 I_2 J_2 dt.$$

Durch Combination dieser Gleichung mit der für dC aufgestellten Gleichung ergiebt sich:

$$\begin{aligned} dH &= dC - 2w_1 J_1 \varDelta I_1 dt - 2w_2 J_2 \varDelta I_2 dt \\ &= dC + i_1 d(i_2 W) + i_2 d(i_1 W). \end{aligned}$$

Hierfür kann man auch im Hinblick auf den für dL aufgestellten Ausdruck schreiben:

$$dH = dC + dL + d(i_2 i_2 W).$$

Es wurde bisher stillschweigend unterstellt, dass an der ponderablen Materie der Rheophore keine andere als elektrische Kräfte wirken. Treten aber solche Kräfte, wie z. B. die Schwerkraft, welche wir äussere Kräfte nennen wollen, auf, so ist, unter dN das dem Zeitdifferential dt entsprechende Differential ihrer Arbeit verstanden:

$$dL = i_1 i_2 dW + dN,$$

und man hat mithin:

$$dH = dC + dL - dN + d(i_1 i_2 W).$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich für solche Aenderungen des betrachteten Systemes, wobei der Anfangs- und der End-Zustand in elektrischer Beziehung einander gleich sind:

$$H + N = C + L,$$

wo C, L u. s. f. die der verstrichenen Zeit entsprechenden Werthe der Grössen bedeuten, deren Differentiale durch dC, dL u. s. f. bezeichnet wurden. Hier ist also die von den chemischen und den äusseren Kräften geleistete Arbeit gleich der Hälfte der gewonnenen lebendigen Kraft, d. h. gleich der Hälfte der lebendigen Kraft der durch die Ströme erzeugten Wärme vermehrt um den Zuwachs der halben lebendigen Kraft der ponderablen Materie des Systemes. Wenn endlich bei einer Bewegung der letzterwähnten Art auch noch Widerstände auftreten,

wir wollen sagen Reibung stattfindet, so ist, unter R die Arbeit dieser Kraft und unter C' die Hälfte der lebendigen Kraft der Reibungswärme verstanden:

$$dL = i_1 i_2 dW + dN + dR,$$

und folglich:

$$H + N = C + C' + L.$$

Für verschiedene Bewegungen der betrachteten Art, wobei die Zersetzungsproducte der Ströme gleich sind, bleibt also auch der Ueberschuss der halben lebendigen Kraft der gesammten entwickelten Wärme und der gewonnenen halben lebendigen Kraft der ponderablen Materie über die Arbeit der äusseren Kräfte constant. Wenn mithin im Besonderen die ponderable Materie am Ende der Bewegung niemals einen Gewinn an lebendiger Kraft aufweist, so bleibt der Ueberschuss der halben lebendigen Kraft der entwickelten Wärme über die Arbeit der äusseren Kräfte constant. Die negative Arbeit der äusseren Kräfte kann man aber als eine vom Systeme verrichtete äussere Arbeit auffassen, so dass also hier an Wärme ebensoviel verloren geht, als das System an äusserer Arbeit verrichtet.

b. Bewegung eines linearen Stromes und eines permanenten Magneten.

Bei der Bewegung eines Systemes, in welchem die Beschleunigung von der Wechselwirkung zwischen einem linearen elektrischen Strome und einem permanenten Magneten herrührt, findet seitens des ersten in den Leitungen der Elementarströme, durch welche wir den Magneten ersetzt denken können, keine Induction statt. Auch wird in jenen Elementarströmen keine Wärme entwickelt und ihre relative Lage bleibt ungeändert. Bezeichnen wir also die verschiedenen bei dem Strome in Betracht kommenden Grössen durch dieselben Buchstaben wie früher und ferner noch das Potential des ganzen Magneten in Bezug auf den Stromleiter, diesen von einem Strome mit der Intensität Eins durchflossen gedacht, durch W, so hat man:

$$dC = 2wJ^2 dt, \; dH = 2wIJdt, \; dL = i\,d\mathrm{W}.$$

Es ist folglich:

$$dH = dC - 2wJ\varDelta I dt,$$

und da man hat:

$$\varDelta I = -\frac{2\lambda}{w} \cdot \frac{d\mathrm{W}}{dt},$$

so ergiebt sich:

$$dH = dC + i d\mathrm{W},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$dH = dC + dL.$$

Durch Integration ergiebt sich hieraus:

$$H = C + L.$$

Wenn neben den elektrischen und magnetischen Kräften auch noch äussere Kräfte wirken und zugleich Reibung stattfindet, so erhält man mit Beibehaltung der früher gebrauchten Bezeichnungsweise:

$$H + N = C + C' + L.$$

Bei einem Systeme der hier betrachteten Art ist der letzten Gleichung zufolge die Arbeit der elektrischen und der äusseren Kräfte stets gleich der halben lebendigen Kraft der entwickelten Strom- und Reibungs-Wärme, vermehrt um die gewonnene halbe lebendige Kraft der ponderablen Materie.

c. Bewegung eines linearen elektrischen Stromes und eines magnetisirbaren Körpers.

In einem bewegten Systeme, welches aus einem linearen Strome und einem magnetisirbaren Körper besteht, ändert sich im Allgemeinen der magnetische Zustand des letzteren. Unter Anderem können wir uns diesen Zustand dadurch erzeugt denken, dass die Wirkung des Stromes eine Richtung der Elementarströme hervorruft, welche ursprünglich in dem beeinflussten Körper vorhanden und so vertheilt sind, dass innerhalb eines jeden verschwindend kleinen Volumtheiles in magnetischer Hinsicht keine Richtung vor der andern ausgezeichnet ist. Eine Induction und Wärmeentwickelung findet in der Leitung dieser Ströme nicht statt. Wie bereits früher bemerkt, nehmen wir an, dass der Zustand des magnetisirbaren Körpers zu jeder Zeit mit dem magnetischen Gleichgewichtszustande zusammenfalle,

welcher der augenblicklichen relativen Lage des Körpers und des Stromes, sowie der Intensität des letzteren, entspricht. Alsdann muss für jede Variation der zur betreffenden Zeit stattfindenden relativen Lage des Leiters und des Körpers, wobei die einzelnen Punkte um Unendlich-Kleines verschoben werden, die Arbeit der Kräfte, welche die auf die ponderable Materie übergehende Wechselwirkung des Stromes und des magnetisirten Körpers darstellen, gleich sein der Variation des Potentiales des Magnetismus in Bezug auf den Strom, vermehrt um die Variation des halben Potentiales des Magnetismus in Bezug auf sich selbst. Es ergiebt sich dies leicht aus den Regeln für das magnetische Gleichgewicht des Körpers und einer der permanent magnetischen Scheiben, durch welche sich zur Bestimmung der gedachten Arbeit der Strom ersetzen lässt.

Bezeichnen wir das Potential des durch den Strom erzeugten Magnetismus in Bezug auf den Stromleiter, diesen von einem Strome mit der Intensität Eins durchflossen gedacht, durch W, ferner die Hälfte des Potentiales des Magnetismus in Bezug auf sich selbst durch $\mathfrak{W}$, so ist nach dem Obigen:

$$dL = i\,d\mathrm{W} + d\mathfrak{W}.$$

Ferner hat man:

$$dC = 2wJ^2dt,\; dH = 2wIJdt,\; \varDelta I = -\frac{2\lambda}{w}\cdot\frac{d\mathrm{W}}{dt}.$$

Hiernach ist:

$$dH = dC + dL - d\mathfrak{W}.$$

Wenn das System sich im Verlaufe der Zeit so ändert, dass sein Endzustand in elektrischer und magnetischer Hinsicht mit dem Anfangszustande zusammenfällt, so ist wie in den bereits betrachteten analogen Fällen:

$$H = C + L.$$

Wenn überdies noch äussere Kräfte und Reibungswiderstände auftreten, so ergiebt sich gleichfalls:

$$H + N = C + C' + L.$$

d. Bewegung eines Elektromotors.

In den Kreis eines linearen elektrischen Stromes seien zwei Drahtrollen mit magnetisirbaren Kernen eingeschaltet, und in der einen lasse sich der Strom mittelst eines Gyrotropen umkehren. Die Axen beider Rollen mögen in eine Linie zusammenfallen und nur längs dieser Linie möge der einen Rolle oder auch beiden Rollen eine hin- und hergehende Bewegung gestattet sein; dann wird man durch gehörige Anwendung des Gyrotropen bewirken können, dass sich die Rollen in Folge der elektrischen und magnetischen Anziehungen und Abstossungen abwechselnd einander nähern und von einander entfernen. Auch kann durch schickliche Einrichtungen bewirkt werden, dass der so gewonnene Elektromotor in regelmässiger Weise eine Arbeit verrichtet, z. B. ein Gewicht hebt, während er selbst zugleich das Spiel des Gyrotropen in Gang erhält.

Es sei nun W_1 das halbe Potential der einen Rolle in Bezug auf sich selbst, d. h. die Summe der Potentiale von je zwei ihrer Windungen in Bezug auf einander. Ferner seien W_1' und W_2' die Potentiale des im Elektromagneten der ersten Rolle auftretenden Magnetismus in Bezug auf die erste und zweite Rolle, $\mathfrak{W}'$ das halbe Potential dieses Magnetismus in Bezug auf sich selbst. Analoge Bedeutungen wie W_1, W_1', W_2' und $\mathfrak{W}'$ für die erste Rolle und ihren Elektromagneten sollen W_2, W_1'', W_2'' und $\mathfrak{W}''$ für die zweite Rolle und ihren Elektromagneten haben. Endlich werde durch W das Potential der einen Rolle in Bezug auf die andere und durch $\mathfrak{W}$ das Potential des einen Elektromagneten in Bezug auf den andern bezeichnet. Man hat alsdann, wenn, wie unterstellt werde, die Wirkungen zwischen den Rollen mit ihren Kernen einerseits und den übrigen Theilen der Stromleitung andererseits ausser Acht gelassen werden können und wenn übrigens die bisherige Bezeichnungsweise beibehalten und sofort die Wirkung äusserer Kräfte, sowie die der Reibung berücksichtigt wird:

$$dC = 2wJ^2\,dt,$$

$$dH = 2wIJdt,$$

$$dL = dN - dC' + i^2 dW + id\,(\mathrm{W}_1' + \mathrm{W}_2' + \mathrm{W}_1'' + \mathrm{W}_2'') + d(\mathfrak{W} + \mathfrak{W}' + \mathfrak{W}''),$$

$$\varDelta I dt = -\frac{2\lambda}{w}\,d(2i[W + W_1 + W_2] + \mathrm{W}_1' + \mathrm{W}_2' + \mathrm{W}_1'' + \mathrm{W}_2'').$$

Hieraus ergiebt sich:

$$dH = dC + dC' - dN + dL + d\,(i^2[W + W_1 + W_2]) - d(\mathfrak{W} + \mathfrak{W}' + \mathfrak{W}'').$$

Für solche Bewegungen des Elektromotors, wobei der Endzustand in Bezug auf die elektrischen und magnetischen Verhältnisse dem Anfangszustande gleich ist, folgt aus der letzten Gleichung durch Integration nach der Zeit:

$$H + N = C + C' + L.$$

Wir schliessen aus diesem Ergebnisse unter Anderem Folgendes. Wenn der Elektromotor eine Anzahl Male seine periodischen Bewegungen ausführt ohne eine äussere Arbeit zu verrichten, und so, dass schliesslich seine ponderable Materie keinen Gewinn an lebendiger Kraft aufweist, so ist die ganze entwickelte Wärmemenge dieselbe, wie wenn die Bewegung der Rollen verhindert wird und der Strom so lange in Thätigkeit bleibt, bis dasselbe Quantum eines Bestandtheiles der Elektrolyte wie vorher ausgeschieden ist. In dem letzten Falle rührt die entwickelte Wärme lediglich von der Wirkung des Stromes her, im ersten Falle ausserdem von der Ueberwindung des Reibungswiderstandes. Wenn aber der Elektromotor, während er seine periodische Bewegung ausführt, eine äussere Arbeit verrichtet, so ist die entwickelte Wärmemenge um ein dieser Arbeit entsprechendes Aequivalent kleiner als diejenige Wärmemenge, welche bei gleicher chemischer Action im ruhenden Elektromotor erzeugt wird.

Wir wollen hier kurz der Versuche gedenken, welche Favre (Recherches sur les courants hydro-électriques. Compt. rend. T. XLV.) über die chemische Action und Wärmeentwickelung in einem Strome, welcher eine Arbeit verrichtet, angestellt hat, indem wir es jedoch dahingestellt sein lassen, in wie weit dieselben als eine Bestätigung der vorhergehenden Betrachtungen angesehen werden können.

Der genannte Forscher schloss eine galvanische Kette von fünf Elementen aus amalgamirtem Zink und platinirtem Platin

und einen Elektromotor in je ein Calorimeter ein. Von dem Elektromotor blieb nur die Rolle, welche dazu diente, die Thätigkeit des Elektromotors nach aussen hin zu richten, und der Träger dieser Rolle, welcher durch eine Oeffnung der äusseren Hülle des betreffenden Calorimeters hindurchging, uneingeschlossen. Der Elektromotor konnte mit der Kette durch Stücke von so geringem Widerstande verbunden werden, dass die in ihnen entwickelte Wärme vernachlässigt werden durfte. Als nun die Kette allein in Thätigkeit war, ergab sich durch Reduction, dass einer Entwickelung von 1 Gramm Wasserstoff eine Wärmeentwickelung von 18682 Einheiten entsprach. Ferner wurde der Elektromotor in den Strom eingeschaltet, ohne dass ihm jedoch eine Bewegung gestattet wurde, und die ganze Wärme, welche alsdann einer Entwickelung von 1 Gramm Wasserstoff entsprach, zu 18667 ermittelt, wobei zu bemerken, dass der Minderbetrag von 15 Einheiten innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler lag. Sodann wurde dem mit der Kette verbundenen Elektromotor gestattet zu functioniren, ohne hierbei eine äussere Arbeit zu verrichten. Die entwickelte Wärme rührte nunmehr nur zum Theil von den elektrischen und magnetischen Kräften, zum andern Theil von der Ueberwindung der gewöhnlichen Widerstandskräfte her. Für dieselbe chemische Action wie vorher wurde jetzt die ganze entwickelte Wärme gleich 18657 gefunden. Als endlich der Elektromotor in Thätigkeit gesetzt und genöthigt wurde, eine äussere Arbeit, zum grössten Theil in der Hebung eines Gewichtes bestehend, zu verrichten, fand sich durch Reduction für die Entwickelung von 1 Grm. Wasserstoff die entwickelte Wärme gleich 18374. Die ganze entsprechende äussere Arbeit, welche der Elektromotor hierbei zu verrichten hat, wurde, in der von uns gebrauchten Einheit ausgedrückt, zu 13124000 ermittelt, d. h. sie war entgegengesetzt gleich der Arbeit, welche die Schwerkraft bei Hebung von 13124000 Grm. auf 1^{cm} Höhe leistet.

Machen wir nun im Hinblick auf die früheren Betrachtungen die Annahme, dass der Minderbetrag von 283 Wärmeeinheiten, wie er sich aus dem letzten Versuche im Vergleich mit dem vorhergehenden ergiebt, das Aequivalent der vom Elektromotor zu verrichtenden Arbeit ist, und bezeichnen wir wie früher, un-

ter $g = 980{,}8$ die Constante der Schwerkraft verstanden, durch Ag die halbe lebendige Kraft der Wärmeeinheit, so kommt:

$$A = 46400.$$

Schliesslich mögen hier noch einige Worte Platz finden über den Zusammenhang zwischen der ganzen in einer Kette entwickelten Wärme und der Summe der Wärmemengen, welche in den einzelnen chemischen Processen der Kette entwickelt oder gebunden würden, wenn jene isolirt vor sich gingen. Wir beschränken uns hierbei wiederum auf solche Ketten, in welchen eine Gasentwickelung nicht stattfindet, und wollen ins Besondere die Daniell'sche Kette ins Auge fassen.

Bei der Daniell'schen Kette kann man den chemischen Hergang unter Anderem wie folgt auffassen. Der Kupfervitriol, in welchen die Kupferelektrode eingetaucht ist, wird zerlegt in Kupfer und Oxysulphion, während zugleich das Schwefelsäurehydrat, in welches die Zinkelektrode eingetaucht ist, in Wasserstoff und Oxysulphion zerlegt wird. Das aus dem Kupfervitriol ausgeschiedene Kupfer schlägt sich auf die Kupferelektrode nieder, das aus dem Schwefelsäurehydrat ausgeschiedene Oxysulphion verbindet sich mit dem Metall der Zinkelektrode zu Zinkvitriol, und das aus dem Kupfervitriol ausgeschiedene Oxysulphion verbindet sich da, wo die flüssigen Leiter mit einander in Berührung kommen, mit dem aus dem Schwefelsäurehydrat ausgeschiedenen Wasserstoff zu Schwefelsäurehydrat. Für eine gegebene Zeit ist die Gesammtarbeit der chemischen Kräfte gleich der Arbeit, welche diese Kräfte bei der Bildung des entstandenen Zinkvitriols leisten, vermehrt um die Arbeit, welche bei der Zersetzung der entsprechenden Menge Kupfervitriol geleistet wird, denn die Arbeitsgrössen bei der Zersetzung des Schwefelsäurehydrates an der Zinkelektrode und bei der Bildung des Schwefelsäurehydrates an der Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten sind entgegengesetzt gleich. Die bei der Zersetzung des Kupfervitrioles geleistete Arbeit aber ist entgegengesetzt gleich derjenigen, welche bei der Bildung einer gleich grossen Menge dieses Stoffes durch Verbindung von Kupfer mit Oxysulphion oder durch Verbindung von Kupfer mit Sauerstoff zu Kupferoxyd und nachheriger Verbindung dieses Oxydes mit Schwefelsäure geleistet wird.

Als Aequivalent der Arbeit, welche die chemischen Kräfte bei der Verbindung zweier Stoffe leisten, ist unter gewöhnlichen Verhältnissen die halbe lebendige Kraft der in Folge der Verbindung auftretenden Wärmebewegung anzusehen. Es mögen nun die bei der Verbrennung von 1gr Kupfer und 1gr Zink entwickelten Wärmemengen bezüglich durch K und Z, ferner die Wärmemengen, welche entwickelt werden, wenn sich 1gr Kupferoxyd und 1gr Zinkoxyd in verdünnter Schwefelsäure auflösen, bezüglich durch k und z bezeichnet werden. Alsdann wird nach dem Obigen, da sich die Atomgewichte von Sauerstoff, Kupfer und Zink wie die Zahlen 8, 31,7 und 32,6 verhalten, die halbe lebendige Kraft der Wärmemenge

$$Z - \frac{31{,}7}{32{,}6} K + \frac{40{,}6}{32{,}6} z - \frac{39{,}7}{32{,}6} k = C$$

gleich sein der Arbeit, welche die chemischen Kräfte in einer Daniell'schen Kette leisten, während 1 Gramm der Zinkelektrode aufgelöst wird. Als Aequivalent derselben Arbeit ist aber auch die halbe lebendige Kraft der Wärme anzusehen, welche bei gleichem Verbrauch an Zink in der ganzen Stromleitung entwickelt wird. Es ist daher für einen constanten Strom der Daniell'schen Kette, in welchem während der Zeiteinheit 1 Gramm Zink gelöst wird:

$$g A C = 2 w J^2 = \frac{2 w i^2}{4^2 \lambda^2}.$$

Diese Formel wird durch die Werthe, welche sich aus der Beobachtung für die Grössen C, i und iw ergeben haben, bestätigt. Was nämlich erstens die Grösse C betrifft, so ist nach Dulong:

$$K = 640, \; Z = 1298,$$

und nach Favre und Silbermann (Recherches sur les quantités de chaleur dégagées dans les actions chimiques et moléculaires. Ann. de Chim. et de Phys. 3me sér. T. XXXVII.):

$$k = 207, \; z = 268.$$

Hiernach ergiebt sich für C der Werth 757. Statt des letzteren wollen wir den wahrscheinlich zuverlässigeren Werth 714 anwenden, welchen Favre und Silbermann (a. a. O.) durch directe calorimetrische Bestimmung für die Wärmemenge fanden, welche entwickelt wird, wenn sich 1gr Zink in Kupfervitriollösung auflöst.

Nach Kohlrausch und Weber beträgt ferner (Elektrodynam. Maassbest. insbesondere Zurückführ. der Stromintensit.-Mess. auf mechan. Maass) in einem Strome, welcher während 1 Secunde aus 9 Gramm Wasser 1 Gramm Wasserstoff ausscheidet, die während derselben Zeit durch den Querschnitt fliessende Quantität positiver Elektricität $149157 . 10^9$ der von uns gewählten Einheiten, und ist mithin die Intensität, welche aus jenem Quantum durch Multiplication mit 4λ erhalten wird, gleich 13591. Folglich hat man für einen Strom der Daniell'schen Kette, in welchem während der Zeiteinheit 1 Gramm der Zinkelektrode aufgelöst wird, da sich die Atomgewichte des Wasserstoffes und des Zinkes wie die Zahlen 1 und 32,6 zu einander verhalten:

$$i = \frac{13591}{32{,}6}.$$

Ueber die Grösse iw endlich erhalten wir durch Versuche Aufschluss, welche Bosscha (über die mechanische Theorie der Elektrolyse. Pogg. Ann. CI. CIII.) über die elektromotorische Kraft der Daniell'schen Kette angestellt hat. Nach dem genannten Forscher ist bei dieser Kette:

$$i'w' = 10258 . 10^7,$$

wo i' die Intensität des Stromes, gemessen durch Weber's magnetische Stromeinheit, und w' den Widerstand, gemessen durch Weber's absolute Widerstandseinheit, bedeutet. Hiernach ist für die von uns gewählten Einheiten:

$$iw = 4\sqrt{2} . 10258 . 10^4 \lambda^2.$$

Setzen wir nun die oben aufgeführten Werthe der Grössen C, i und iw in die fragliche Formel ein, so finden wir:

$$A = 43200,$$

und dieser Werth nähert sich den Werthen, welche für die Constante A auf anderen Wegen erhalten wurden, so sehr, dass man in diesem Ergebniss eine Bestätigung der Formel erblicken muss.

Litteratur. Helmholtz. Ueber die Erhaltung der Kraft. 1847.

Clausius. Remarques sur la relation entre l'action chimique qui a lieu dans une pile voltaïque et les effets produits par le courant. Archives des sciences physiques et naturelles (Biblioth. univ. de Genève). T. XXXVI.

Thomson. On the mechanical theory of electrolysis. Philos. Magaz. 4. series. Vol. II.

[illegible] Weber [illegible] galvanischen [illegible] Stromstärke, die Stromintensität [illegible] Strome, welcher während [illegible] Wasser 1 Centigr. Wasserstoff ausscheidet [illegible] derselben Zeit [illegible] der gesammten Stromkreis [illegible] Liebenlichtsl. 1,0137.10' der [illegible] Flüssigkeit [illegible] welche [illegible] erhalten wird, [illegible] Stromkreis der Daniell'schen Kette [illegible] während der Zeiteinheit 1 Gramm [illegible] wird, da sich die Atomgewichte des Wasserstoffes und [illegible] Zinkes wie die Zahlen 1 und 32,5 zu einander verhalten.

[illegible]

[illegible] wir durch Versuche [illegible] mechanische Theorie [illegible] über die elektromotorische Kraft der Daniell'schen Kette angestellt hat. Nach dem genannten Forscher ist bei dieser Kette:

$$[illegible] = 10258.10^{[illegible]}$$

wo J die Intensität des Stromes, gemessen durch Weber's magnetische Stromeinheit, und w den Widerstand, gemessen durch Weber's absolute Widerstandseinheit, bedeutet. Hiernach ist [illegible]

$$[illegible] = 10258.10^{11}$$

Setzen wir nun die oben angeführten Werthe der Grössen [illegible] und [illegible] in die fragliche Formel ein, so finden wir:

$$A = 43200,$$

und dieser Werth nähert sich den Werthen, welche für die Constante A auf anderen Wegen erhalten wurden, so sehr, dass man in diesem Ergebnisse eine Bestätigung der Formel erblicken muss.

Literatur. [illegible] Ueber die Erhaltung der Kraft 1847.
[illegible] Note sur [illegible] qui est produite par le courant. Archives [illegible] (Bibl. univ. de Genève) T. XXVI.
[illegible] On the [illegible] of electrolysis. Philos. Mag. [illegible] series Vol. 12.

20

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Beer, August,

Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik

Braunschweig 1865

Phys.sp. 47
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10133362-1